Жусупбаев А.Ж.,
Омуров Т.Д.,
Култаев Т.Ч.,
Шабыкеев Б.,
Маматкадырова Г.Т.,
Алыбаев А.М.

Экономикадагы математика

Бишкек 2005

КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН
БИЛИМ БЕРҮҮ МИНИСТРЛИГИ

**Жусупбаев А.Ж., Омуров Т.Д.,
Култаев Т.Ч., Шабыкеев Б.,
Маматкадырова Г.Т., Алыбаев А.М.**

Экономикадагы математика

(I-бөлүм)

Жогорку окуу жайларынын студенттери үчүн
окуу китеби

Кыргыз Республикасынын билим берүү министрлиги
тарабынан окуу китеби катарында бекитилген

Бишкек 2005

ББК 22.1
Э 40

Рецензенттер: Саадабаев А.С. – физика-математика илимдеринин доктору, профессор; Мусакожоев Ш.М. – экономика илиминин доктору, профессор; Искандаров С. – физика-математика илимдеринин доктору.

Э 40 Экономикадагы математика: Жогорку окуу жайларынын студенттери үчүн окуу китеби: I - бөлүм: / А.Ж. Жусупбаев, Т.Д. Омуров, Т.Ч. Култаев ж.б.–Б.: 2005.– 266 б.

ISBN 9967-03-229-4

Окуу китебинде жогорку математика курсунун көп аргументтүү функциялары бөлүмүнө чейинки түшүнүктөр берилген.

Өз алдынча иштөө үчүн ар бир главада жетишээрлик санда көнүгүүлөр сунушталган.

Китеп жогорку окуу жайлардын экономика, колдонмо математика жана экономикадагы математикалык методдор багыттарындагы күндүзгү жана сырттан окуу бөлүмдөрүндө окуган студенттерине арналат. Ошондой эле ушул багытта иштеген адистер да пайдаланса болот.

Шарттуу белгилөөлөр:

▯ – далилдөөнүн башталышы жана бүтүшү;
◊ – чыгарылыштын башталышы жана бүтүшү;
ш.а.б. – шарттуу акча бирдиги;
а.б. – акча бирдиги.

Э 1602000000-05
ISBN 9967-03-229-4

ББК 22.1

МАЗМУНУ

Окуу болсо – билим
үчүн жол салат.
Билим болсо – иштин
көзүн ал табат.
Жусуп Баласагын

Кириш сөз

Математика иш жүзүнө ашырууга боло турган физикалык, химиялык, биологиялык, экономикалык, социалдык жана башка кубулуштарга болгон моделдердин математикалык структурасын, түзүлүшүн үйрөтөт. Ошондуктан ал моделди үйрөнүү менен биз каралган реалдуу кубулуштарды үйрөнгөн болобуз, б.а. математикалык моделдер аркылуу, математика бизди курчап турган чөйрөдөгү процесстердин өзгөрүлүшүн изилдөөгө мүмкүнчүлүк берет. Математиканын гносеологиялык мааниси мына ушунда.

Ошентип, конкреттүү айкын маселелерди баяндап жазып чыгуунун колдонулушунда математиканын абстрактуулугу кандайдыр бир кыйынчылыкты туудурушу мүмкүн, бирок ошол эле мезгилде ага, математикалык абстрактуулуктун жалпы жана универсализимдүүлүк күч берет. Математика менен анын колдонулушун чаташтырбоо керек. Математика өзү абстрактуу болгону менен анын колдонулушу конкреттүү айкын болушу мүмкүн. Ошондуктан математиканын өзүн үйрөнбөй туруп, анын колдонулуштарын үйрөнө албайбыз. Ушул максатта, сиздерге «Экономикадагы математика» деп аталган окуу китеби сунуш кылынат.

Бул китеп, математиканы окуган баардык жогорку окуу жайлардагы стандарттык программаларды эске алып, азыркы мезгилдин талабына ылайык жазылды. Жазуу мезгилинде фундаменталдык идеяларга, алгоритмдерге көбүрөөк көңүл бурулду.

Ар бир главадагы параграфтар түшүнүктүүрөөк болуш үчүн чиймелердин жардамы аркылуу мисалдар менен бекемделип, кээ бир экономикалык идеяларды мисалдар аркылуу көрсөтүүгө аракет кылынды, ал эми главанын акырында жетишерлик санда көнүгүүлөр киргизилди.

Китептин кол жазмаларын окуп, баалуу ой-пикирлерин, сунуштарын айтышкан рецензенттерге: физика-математика илимдеринин докторлору, профессорлор А. С. Саадабаев, С. Искандаров жана экономика илиминин доктору, профессор Ш.М. Мусакожоев жолдошторго чоң ыраазычылыгыбызды билдиребиз. Ошондой эле окуу китебинде орун алган кемчиликтерди көрсөтүп, анын сапатын жакшыртууга багытталган пикирлерин билгизген жолдошторго да чоң рахмат айтар элек.

Авторлор.

БИРИНЧИ ГЛАВА
АНАЛИТИКАЛЫК ГЕОМЕТРИЯНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ

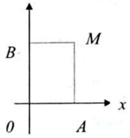
XVII кылымда француз философу, физиги жана математиги Р. Декарт тарабынан аналитикалык геометриянын негизги аппараты болгон координаталар ыкмасы киргизилген.

Аналитикалык геометрия – бул геометриялык фигураларды жана алардын касиеттерин, геометриялык маселелерди координаталар ыкмасы аркылуу алгебралык жол менен изилдөөчү математиканын бир бөлүгү.

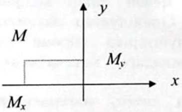
Бул глава алдынкы айтылган маселелерди жана алардын колдонулуштарын камтыйт.

§1. Тик бурчтуу координаталар системасы

Жалпы O башталышына жана бирдей масштаб бирдигине ээ болгон өз ара перпендикулярдуу Ox жана Oy октору *тегиздиктеги тик бурчтуу координаталар системасын* түзүшөт (1.1–чийме),



1.1-чийме



1.2-чийме

мында Ox огу - *абсцисса огу*, ал эми Oy - *ордината огу* деп аталат. Булар бирдикте *координаталык октор* деп аталышат. Ox жана Oy октору жайланышкан тегиздик *координаталык тегиздик* деп аталат жана Oxy деп белгиленет.

Айталы, M – тегиздиктеги каалагандай чекит болсун. Бул чекиттен Ox жана Oy окторуна MA жана MB перпендикулярын түшүрөлү.

M чекитинин x жана y тик бурчтуу координаталары деп, тиешелүү түрдө $\overline{OA}$ жана $\overline{OB}$ багытталган кесиндилеринин OA жана OB чоңдуктарын айтышат:

$$x = OA, \; y = OB.$$

M чекитинин x жана y координаталары тиешелүү түрдө бул чекиттин *абсциссасы жана ординатасы* деп аталат жана $M(x,y)$ деп белгиленет. Координата башталышы $(0,0)$ координаталарына ээ.

Демек, координаталар системасындагы ар бир M чекитине тегиздиктеги жалгыз гана (x,y) түгөйү, б.а. бул чекиттин тик бурчтуу координаталары туура келет жана тескерисинче, ар бир (x,y) түгөйүнө абсцисасы x ке, ординатасы y ке барабар болгон Oxy тегиздигиндеги жалгыз гана M чекити туура келет.

Ошентип, тегиздиктеги тик бурчтуу координаталар системасын киргизүү менен, биз тегиздиктеги бардык чекиттердин көптүгү менен түгөй сандардын көптүгүнүн ортосундагы өз ара бир маанилүү туура келүүчүлүк бар экендигин көрсөттүк. Ал эми бул болсо, геометриялык маселелерди чыгарууда алгебралык ыкмаларды колдонууга мүмкүндүк берет.

Мисал. $M(-5,2)$ чекитин тургузгула.

◊ Ox огунан $x=-5$ координатасына ээ болгон M_x чекитин, ал эми Oy огунан $y=2$ координатасына ээ болгон M_y чекитин алабыз. M_x чекити аркылуу Oy огуна жарыш болгон түз сызык, ал эми M_y чекити аркылуу Ox огуна жарыш болгон түз сызык жүргүзөбүз. Бул түз сызыктардын кесилиши изделүүчү $M(-5,2)$ чекитин берет (1.2-чийме) ◊

§ 2. Эки чекиттин арасындагы аралык

Айталы Oxy тегиздигинде каалагандай $A(x_1,y_1)$ жана $B(x_2,y_2)$ чекиттери берилсин. Анда алардын арасындагы аралык

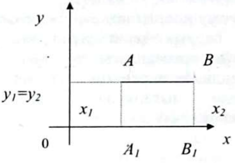
$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (2.1)$$

формуласы менен аныкталат. Ушул формуланы далилдейли.

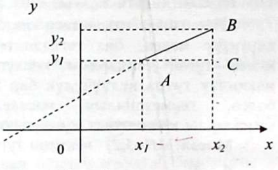
Эгерде A,B чекиттери Ox огунда жатышса, анда алардын арасындагы аралык $AB=|x_2-x_1|$ ($y_1=y_2=0$) га барабар болот. Себеби, $y_1=y_2\neq 0$ болсо, анда AB кесиндиси Ox огуна жарыш жана $AB=A_1B_1$ болмок. Мында A_1 жана B_1 – чекиттери A жана B чекиттеринин Ox огундагы проекциялары. Ошондуктан $AB=|x_2-x_1|$, бул болсо $y_1=y_2$ болгондо (2.1) формуласы менен дал келет (2.1- чийме).

Ушул эле сыяктуу, $x_1=x_2$ болгондо $AB=|y_2-y_1|$ келип чыгат жана (2.1) формуласы менен $x_1=x_2$ учурда дал келет.

Эми $x_1 \neq x_2$ жана $y_1 \neq y_2$ болсун. A чекити аркылуу Ox огуна жарыш болгон, B чекити аркылуу Oy огуна жарыш болгон түз сызыктарды жүргүзөлү. Бул түз сызыктар координаталык окторго жарыш болгондуктан өз ара перпендикуляр болушат жана кандайдыр бир $C(x_2, y_1)$ чекитинде кесилишсин (2.2-чийме).



2.1-чийме



2.2-чийме

Мында ABC үч бурчтугу тик бурчтуу үч бурчтук болуп саналат жана $AC = |x_2 - x_1|, BC = |y_2 - y_1|$. Анда Пифагордун теоремасы боюнча

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2.$$

Демек, $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ келип чыгат.

Мисал. $A(5,2)$ жана $B(-1,10)$ чекиттеринин арасындагы аралыкты тапкыла.

◊ (2.1) формуласы боюнча:

$$AB = \sqrt{(-1-5)^2 + (10-2)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10 \quad ◊$$

§3. Кесиндини берилген катышта бөлүү

Айталы тик бурчтуу координаталар системасында $A(x_1, y_1)$ жана $B(x_2, y_2)$ чекиттери берилсин.

Эгерде C чекити A жана B чекиттери менен бир түз сызыкта жатса жана AB кесиндисин берилген $\lambda = \dfrac{AC}{CB}$ катышында бөлсө, анда C чекитинин координаталары

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad \text{жана} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \tag{3.1}$$

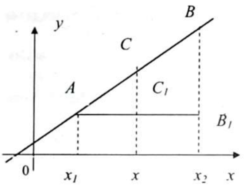
формулаларынан аныкталат.

Айталы AB кесиндиси Ox огуна жарыш болбосун (3.1-чийме). Анда ACC_1 жана ABB_1 үч бурчтуктары окшош үч бурчтуктар болушат жана

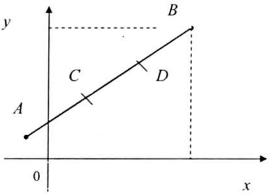
$$\frac{AC_1}{C_1B_1}=\frac{AC}{CB}\Rightarrow\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda\Rightarrow x-x_1=\lambda(x_2-x)\Rightarrow x+\lambda x=x_1+\lambda x_2\Rightarrow$$

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

Ушул сыяктуу эле (3.1) формуласынын экинчисин далилдөөгө болот.



3.1-чийме



3.2-чийме

Мисал. Учтары $A(-1,1)$ жана $B(6,7)$ болгон AB кесиндиси барабар болгон үч бөлүккө бөлүнгөн. Бөлүү чекиттердин координаталарын аныктагыла (3.2- чийме).

◊ C чекити үчүн $\frac{AC}{CB}=\lambda=\frac{1}{2}$ болгондуктан, (3.1)-формуласы боюнча

$$x=\frac{-1+\frac{1}{2}\cdot 6}{1+\frac{1}{2}}=\frac{4}{3},\quad y=\frac{1+\frac{1}{2}\cdot 7}{1+\frac{1}{2}}=3.$$

D чекити үчүн $\frac{AD}{DB}=\lambda=\frac{2}{1}=2,\ x=\frac{-1+2\cdot 6}{1+2}=3\frac{2}{3},$

$$y=\frac{1+2\cdot 7}{1+2}=5.$$

Демек, AB кесиндиси $C\left(\frac{4}{3};3\right),D\left(3\frac{2}{3};5\right)$ чекиттеринин жардамы менен барабар үч бөлүккө бөлүнөт ◊

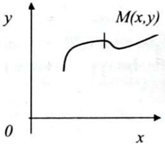
Айрым учурда, эгерде $C(x,y)$ чекити AB кесиндисин тең экиге бөлсө, анда $\lambda = 1$ болот жана координаталары $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ формулаларынан аныкталат, б.а. кесиндинин тең ортосунун координаталары бул кесиндинин учтарынын бир аттуу координаталарынын жарым суммасына барабар болот.

§4. Тегиздиктеги ийри сызыктын теңдемеси

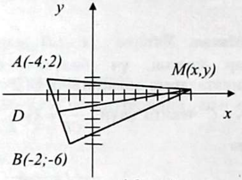
Ийри сызыктын теңдемеси аналитикалык геометриядагы негизги түшүнүктөрдүн бири болуп саналат.

Айталы бизге тегиздиктеги кандайдыр бир ийри сызык берилсин (4.1-чийме). Бул сызыкта жаткан M чекитинин x жана y координаталары анык бир түрдө өз ара байланышат. Бул байланыш аналитикалык түрдө кандайдыр бир теңдеме түрүндө жазылат.

Аныктама. Ийри сызыкка таандык болгон ар бир чекиттин x жана y координаталары канааттандырган, ал эми бул сызыкка таандык болбогон каалагандай чекиттин координаталары канааттандырбаган теңдеме Oxy тегиздигиндеги *ийри сызыктын теңдемеси* деп аталат.



4.1-чийме



4.2-чийме

Жалпы учурда ийри сызыктын теңдемеси $F(x,y) = 0$ же $y = f(x)$ түрүндө жазылат Мында $F(x,y) = 0$ жана $y = f(x)$ кандайдыр бир функциялар.

Эгерде $M(x,y)$ чекитин ийри сызык боюнча жылдырсак, анда бул чекиттин координаталары өзгөрүү менен бул сызыктын теңдемесин канааттандырат. Ошондуктан $M(x,y)$ чекитинин координаталарын *өзгөрүүчү координаталар* деп айтабыз.

Мисал. $A(-4,2)$ жана $B(-2,-6)$ чекиттеринен бирдей аралыкка алыстатылган чекиттердин көптүгүнүн теңдемесин жазгыла.

◊ $M(x,y)$ чекити A жана B чекиттеринен бирдей алыстатылгандыктан $AM = BM$ (4.2-чийме) болот. (2.1) формуласы боюнча төмөнкүлөрдү алабыз:

$$AM = \sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2}\ , \quad BM = \sqrt{(x+2)^2 + (y+6)^2}$$

$$\sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y+6)^2} \Rightarrow$$

$$x - 4y - 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$$

Бул AB кесиндисинин тең ортосунан өтүүчү MD перпендикулярынын теңдемеси болуп саналат ◊

Каалагандай ийри сызыкка тиешелүү болгон теңдемени жазууга болот. Бирок каалагандай эле теңдеме тегиздикте кандайдыр бир ийри сызыкты аныктай бербейт. Мисалы, $x^2 + y^2 = 0$ теңдемеси бир гана $(0,0)$ чекитин аныктайт, ал эми $x^2 + y^2 + 7 = 0$ теңдемеси эч кандай чекиттердин көптүгүн аныктабайт, себеби теңдеменин оң жагы 0 гө барабар болушу мүмкүн эмес.

$M(a,b)$ чекитинин $F(x,y) = 0$ теңдемеси менен берилген ийри сызыкта жатаарын аныктоо үчүн бул чекиттин координаталары $F(x,y) = 0$ теңдемесин канааттандыра тургандыгын текшерүү зарыл.

§5. Түз сызыктын теңдемелери

1. Бурчтук коэффициенти менен берилген түз сызыктын теңдемеси. Айталы берилген түз сызык Oy огун $B(0,b)$ чекитинде кесип өтсүн жана Ox огунун оң багыты менен α $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ бурчун түзсүн (5.1- чийме).

Бул түз сызыктын каалагандай $M(x,y)$ чекитин алалы. Анда α бурчунун тангенсин MBN үч бурчтугунан алабыз

$$tg\,\alpha = \frac{MN}{NB} = \frac{y-b}{x}\ . \tag{5.1}$$

Түз сызыктын Ox огуна жантаюу бурчунун тангенси бул түз сызыктын бурчтук коэффициенти деп аталат жана $k = tg\,\alpha$ деп белгиленет. Анда (5.1)ден

$ax+by+c=0$

$$k = \frac{y-b}{x} \Rightarrow y = kx + b \tag{5.2}$$

келип чыгат жана ал теңдемени *бурчтук коэффициенти менен берилген түз сызыктын теңдемеси* деп атайбыз.

2. Берилген багыттагы берилген чекит аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемеси. Айталы түз сызык $M_1(x_1,y_1)$ чекити аркылуу өтүп, Ox огу менен $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$ бурчун түзсүн (5.2- чийме).

$M_1(x_1,y_1)$ чекити түз сызыкта жаткандыктан анын координаталары (5.2) теңдемесин канаатандырат, б.а.

$$y_1 = kx_1 + b\,.$$

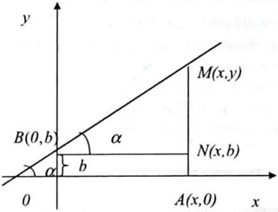
Мындан bны аныктап, (5.2) ге коюп, түз сызыктын изделүүчү

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (5.3)$$

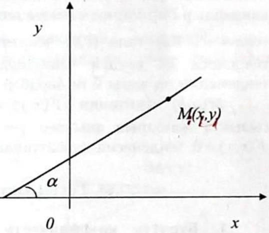
теңдемесине ээ болобуз.

Мисал. $A(4,-1)$ чекити аркылуу өтүп, Ox огу менен 135^o бурчту түзгөн түз сызыктын теңдемесин жазгыла.

◊ Бурчтук коэффициент $k = tg135^o = -1$. Анда (5.3) боюнча $y+1=-1(x-4)$ же $y=-x+3$ теңдемесин алабыз ◊



5.1- чийме



5.2- чийме

3. Түз сызыктардын боосунун теңдемеси. Эгерде (5.3) теңдемесиндеги k - каалагандай сандарга ээ болсо, анда бул теңдеме $x = x_1$ түз сызыгынан башка $M_1(x_1,y_1)$ чекити аркылуу өтүүчү түз сызыктардын боосун аныктайт (5.3-чийме). Ал эми $M_1(x_1,y_1)$ чекити ал боонун борбору болот.

Мисал. $A(5,3)$ чекити аркылуу өткөн түз сызыктардын боосунун теңдемесин жазгыла.

◊ $A(5,3)$ чекити аркылуу өткөн түз сызыктардын боосунун теңдемесин $y-3=k(x-5)$ көрүнүшүндө болот ◊

4. Берилген эки чекит аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемеси. Айталы бизге $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ чекиттери берилип жана $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ болсун. M_1M_2 түз сызыгынын теңдемесин түзүү үчүн

M_1 чекити аркылуу өтүүчү түз сызыктардын боосунун теңдемесин жазабыз (5.4-чийме):

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (*)$$

$M_2(x_2, y_2)$ чекити бул түз сызыкта жаткандыктан, аны боодо белгилөө үчүн бул чекиттин координаталарын боонун теңдемесине коебуз да бурчтук коэффициенти аныктайбыз:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1) \Rightarrow k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (5.4)$$

Алынган бурчтук коэффициентти (*) теңдемесине коюп, жыйынтыгында төмөнкүгө ээ болобуз:

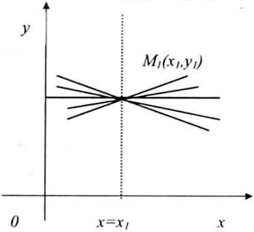
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Rightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (5.5)$$

Ушул (5.5) формуласын *берилген эки чекит аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемеси* деп атайбыз.

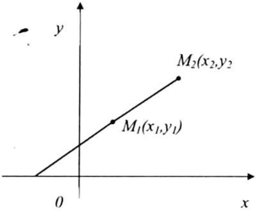
Мисал. $A(2,-3)$ жана $B(-5,4)$ чекиттери аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемесин жазгыла.

◊ (5.5) формуласы

$$\frac{y+3}{4+3} = \frac{x-2}{-5-2} \Rightarrow \frac{y+3}{7} = \frac{x-2}{-7} \Rightarrow y = -x - 1 \ ◊$$



5.3-чийме



5.4-чийме

5. Түз сызыктын кесиндилердеги теңдемеси. Координаталык окторду берилген $a \neq 0, b \neq 0$ кесиндилери менен кесип өтүүчү түз сызыктын теңдемесин жазалы.

$A(a,0)$ жана $B(0,b)$ чекити аркылуу өткөн түз сызыктын теңдемеси (5.5) формуласы боюнча $\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a}$ түрүндө жазылат жана андан

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (5.6)$$

келип чыгат (5.5-чийме). Ушул формула *түз сызыктын кесиндилердеги теңдемеси* деп аталат.

Мисал. Эгерде $A(3,-2)$ чекити аркылуу өтүүчү түз сызык Oy оң жарым огун Ox оң жарым огуна караганда эки эсе чоң кесиндиге кесип өтсө, анда бул түз сызыктын теңдемесин жазгыла (5.6 – чийме).

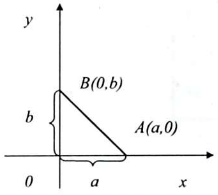
◊ Шарт боюнча $b=2a(a>0,b>0)$. Бул маанини (5.6) га коебуз:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{2a}=1.$$

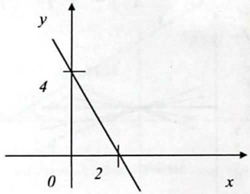
$A(3,-2)$ чекити бул түз сызыкта жаткандыктан, анын координаталары бул теңдемени канааттандырат, б.а.

$$\frac{3}{a}-\frac{2}{2a}=1 \Rightarrow \frac{3}{a}-\frac{1}{a}=1 \Rightarrow a=2, b=4.$$

Демек, изделүүчү теңдеме $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$ түрүндө жазылат ◊



5.5-чийме



5.6-чийме

6. Түз сызыктын жалпы теңдемеси. Эки өзгөрүлмөлүү биринчи даражадагы теңдеменин жалпы көрүнүшүн карайлы:

$$Ax+By+C=0. \qquad (5.7)$$

Мында, A жана B коэффициенттери бир убакта 0 гө барабар эмес, б.а. $A^2+B^2\neq 0$.

1. Айталы $B\neq 0$ болсун. Анда (5.7) ни төмөндөгүдөй жазууга болот:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

Биз $k=-\frac{A}{B}, b=-\frac{C}{B}$ белгилөөлөрүн киргизели. Анда: а) эгерде $A\neq 0, C\neq 0$ болсо, анда $y=kx+b$ (бурчтук коэффициенти менен берилген түз сызыктын теңдемеси); б) эгерде $A\neq 0, C=0$ болсо, анда $y=kx$ (координата башталышы аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемеси); в) эгерде $A=0, C\neq 0$ болсо, анда $y=b$ (Ox огуна жарыш болгон түз сызыктын теңдемеси); г) эгерде $A=0, C=0$ болсо анда $y=0$ го (Ox огунун теңдемеси) ээ болобуз.

2. Эми $A\neq 0, B=0$ болсун. Анда (5.7) теңдемесин $x=-\frac{C}{A}$ түрүндө жазууга болот. $a=-\frac{C}{A}$ деп белгилесек жана $C\neq 0$ болсо, анда $x=a$ (Oy огуна жарыш түз сызыктын теңдемеси); ал эми $C=0$ болсо, анда $x=0$ (Oy огунун теңдемеси) теңдемесине ээ болобуз.

Демек, бир убакта 0 гө барабар болбогон A, B жана C коэффициенттеринин каалагандай маанилеринде (5.7) теңдемеси Oxy тегиздигиндеги кандайдыр бир түз сызыктын теңдемесин берет. Ошондуктан (5.7) *түз сызыктын жалпы теңдемеси* деп аталат.

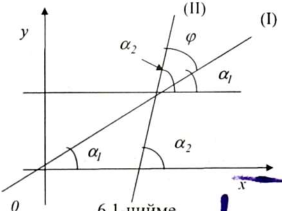
Түз сызыктар боосунун теңдемесинен айырмасы, (5.7) жалпы теңдемеси Oy огуна жарыш болгон каалагандай вертикалдуу түз сызыктардын теңдемесин да өз ичине камтып турат.

§6. Түз сызыктардын параллелдүүлүк жана перпендикулярдуулук шарттары. Чекиттен түз сызыка чейинки аралык

1. Эки түз сызыктын арасындагы бурч. Айталы бизге бурчтук коэффициенти менен эки түз сызыктын теңдемелери берилсин:

$$y=k_1x+b_1,\quad k_1=tg\alpha_1 \qquad (I)$$

$$y=k_2x+b_2, k_2=tg\alpha_2 \qquad (II)$$



6.1-чийме

жана бул түз сызыктардын арасындагы $\varphi(0\leq\varphi\leq\pi)$ бурчун аныктоо талап кылынсын.

6.1-чиймеден φ бурчу α_1 жана α_2 бурчтарынын айырмасына барабар экендиги көрүнүп турат: $\varphi=\alpha_2-\alpha_1$.

Анда

же $$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2} \qquad (6.1)$$

Мында стрелка φ бурчу (I) – түз сызыкты саат стрелкасына карама-каршы багытта (II)-түз сызыкка буруудан алына тургандыгын билдирет.

2. Түз сызыктардын паралелдүүлүк жана перпендикулярдуулук шарты.

Эгерде (I) жана (II) түз сызыктар жарыш болушса, анда алардын арасындагы бурч 0 гө барабар, б.а. $\varphi=0$ жана $tg\varphi=0$ болот да, (6.1) формуласынан төмөндөгү келип чыгат:

$$\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}=0\Rightarrow k_1=k_2.$$

Тескерисинче, эгерде $k_1=k_2$ болсо, анда $tg\varphi=0$ жана $\varphi=0$ келип чыгат. Демек, *эки түз сызыктын жарыш болушу үчүн бул түз сызыктардын бурчтук коэффициенттеринин барабар болушу, б.а. $k_1=k_2$ шартынын орун алышы зарыл жана жетиштүү шарт болуп саналат.*

Эгерде (I) жана (II) – түз сызыктары перпендикуляр болушса, анда $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Бул учурда

$$ctg\varphi=ctg\frac{\pi}{2}=0\Rightarrow ctg\varphi=\frac{1}{tg\varphi}=\frac{1+k_1\cdot k_2}{k_2-k_1}=0\Rightarrow k_1k_2+1=0\Rightarrow k_1\cdot k_2=-1.$$

Демек, *эки түз сызыктын перпендикуляр болушу үчүн алардын бурчтук коэффиценттери чоңдугу боюнча тескери жана белгиси боюнча карама-каршы, б.а. $k_1\cdot k_2=-1$ шарты орун алышы зарыл жана жетиштүү.*

Эгерде түз сызыктар

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0,$$

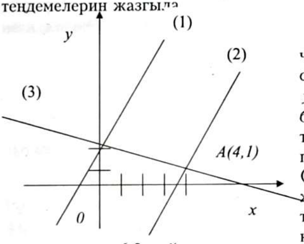
жалпы теңдемелери менен берилсе, анда алардын бурчтук коэффициенттери $k_1=-\frac{A_1}{B_1}, k_2=-\frac{A_2}{B_2}$ болгондуктан, түз сызыктардын параллелдүүлүк шарты $k_1=k_2\Rightarrow\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}$ көрүнүшүндө болот. Демек, жалпы теңдемеси менен берилген түз сызыктардын *параллелдүүлүк шарты* болуп, өзгөрүлмөлөрдүн коэффициенттеринин *пропорционалдуулук* шарты эсептелет.

Ал эми түз сызыктардын перпендикулярдуулук $k_1 \cdot k_2 = -1$ шарты

$$\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)\cdot\left(-\frac{A_2}{B_2}\right) = -1 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

көрүнүшүндө болот, б.а. жалпы теңдемелери менен берилген түз сызыктардын перпендикулярдуулук шарты болуп, x жана y өзгөрмөлөрүнүн коэффициенттеринин көбөйтүндүлөрүнүн суммасынын нөлгө барабар болушу зарыл.

Мисал. $A(4,1)$ чекити аркылуу өтүп, $3x - y + 2 = 0$ түз сызыгына жарыш жана перпендикуляр болгон түз сызыктардын теңдемелерин жазгыла.



6.2-чийме

◊ I - жол. $A(4,1)$ чекити аркылуу өткөн түз сызыктар боосунун теңдемеси $y - 1 = k(x - 4)$ көрүнүшүндө болот. Бул боодон берилген түз сызыкка жарыш жана перпендикуляр болгон (аларды тиешелүү түрдө (2) жана (3) деп белгилейбиз) түз сызыктарды бөлүп алуу керек (6.2-чийме)

$$3x - y + 2 = 0 \Rightarrow y = 3x + 2 \qquad (1)$$

(1) - түз сызыктын бурчтук коэффициенти $k_1 = 3$. Параллелдүүлүк шарты боюнча $k_1 = k_2 = 3$ жана (2) - түз сызыктын теңдемеси $y - 1 = 3(x - 4) \Rightarrow 3x - y - 11 = 0$ көрүнүшүндө болот. Перпендикулярдуулук шарты боюнча $k_3 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{3}$ жана (3) - түз сызыктын теңдемеси $y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 4) = 0 \Rightarrow x + 3y - 7 = 0$ көрүнүшүндө жазылат ◊

II - жол. $Ax + By + C = 0$ түз сызыгы $3x - y + 2 = 0$ түз сызыгына жарыш болуш үчүн белгисиздердин коэффициенттери пропорционалдуу болушу керек, б.а. $\frac{A}{3} = \frac{B}{-1}$ орун алат. Эгерде $A = 3, B = -1$ десек, $3x - y + C = 0$ теңдемесине ээ болобуз. $A(4,1)$

чекити бул түз сызыкта жаткандыктан $3\cdot 4-1+C=0 \Rightarrow C=-11$ жана (2) түз сызыктын теңдемеси $3x-y-11=0$ болот.

$Ax+By+C=0$ түз сызыгы $3x-y+2=0$ түз сызыгына перпендикуляр болушу үчүн $3A-B=0$ болушу керек. Бул барабардык $A=1; B=3$ болгондо орун алат. Демек, $x+3y+C=0$. $A(4,1)$ чекити бул түз сызыкта жаткандыктан

$4+3\cdot 1+C=0 \Rightarrow C=-7$. Демек, изделүүчү теңдеме $x+3y-7=0$ түрүндө жазылат.

3. Түз сызыктардын кесилиш чекити. Бизге $A_1x+B_1y+C_1=0$ жана $A_2x+B_2y+C_2=0$ түз сызыктары берилсин. Бул түз сызыктардын кесилиш чекитинин координаталары ар бир түз сызыктын теңдемесин канааттандырышы керек. Ошондуктан кесилиш чекитинин координаталары

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0, \end{cases}$$

системасынан табылат. Эгерде түз сызыктар жарыш болбосо, б.а. $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ болсо, анда системанын чыгарылышы түз сызыктардын жалгыз гана кесилиш чекитин берет.

4. Чекиттен түз сызыкка чейинки аралык. Бизге $M(x_0,y_0)$ чекити жана $Ax+By+C=0$ түз сызыгы берилсин. M чекитинен AB түз сызыгына чейинки аралык деп, бул чекиттен берилген түз сызыкка түшүрүлгөн $d=MN$ перпендикулярдын узундугун түшүнүүгө болот (6.3-чийме). Бул d аралыгын аныктоо үчүн:

а) $M(x_0,y_0)$ чекити аркылуу өткөн жана берилген түз сызыка перпендикуляр болгон түз сызыктын теңдемесин жазуу;

б) түз сызыктардын кесилиш чекити $N(x_1,y_1)$ табуу;

в) (2.1) формуласынын жардамында M жана N чекиттеринин арасындагы аралыкты, б.а $d=MN$ ди аныктоо зарыл.

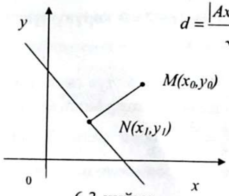
Алдыдагы пункттарды аткарып, бир нече өзгөртүп түзүүлөрдү жүргүзгөндөн кийин

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (6.2)$$

формуласын алабыз.

(6.2) - *чекиттен түз сызыка чейинки аралыкты* аныктоо формуласы.

Мисал. $A(0,5)$ чекитинен $3x+4y+12=0$ түз сызыгына чейинки аралыкты аныктагыла.

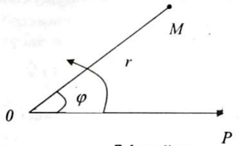


6.3-чийме

◊ (6.2) формуласы боюнча $d = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 5 + 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{32}{5} = 6{,}4$ ◊

§7. Полярдык координаталар системасы

Тегиздиктеги жылбас O чекитин, андан чыгуучу OP жарым түз сызыгын жана O чекитинин айланасында бул сызыктан бурчтарды эсептөө багытын тандап алалы. O дон айырмалуу болгон тегиздиктеги ар бир M чекитине төмөнкү эки санды тиешелүү кылалы: O дон M ге чейинки аралык r жана берилген багытта эсептелинген OM жана OP жарым түз сызыгынын арасындагы радиан менен туюнтулган φ бурчун (7.1-чийме). Мында O чекитин *полюс* (борбор) OP жарым түз сызыгын *полярдык ок* деп аташат.



7.1-чийме

Ал эми r жана φ сандары M чекитинин *полярдык координаталары:* r - полярдык радиус, M чекитинен O полюска чейинки аралык, φ - полярдык бурч, OP полярдык ок менен OM жарым түз сызыгы аркылуу түзүлгөн бурч. Бул система *полярдык координаталар системасы* деп аталат. O борборуна $r=0$ туура келет, ал жерде φ бурчу аныкталбаган.

φ бурчу каалагандай маанини кабыл ала алат. Мында 2π эсеге айырмаланышкан бардык бурчтар башталышы O болгон бир эле жааны аныкташат. Ошондуктан тик бурчтуу координаталар системасынан айырмаланып, полярдык координаталар менен тегиздиктин чекиттеринин ортосунда бир маанилүү туура келүүчүлүк орун албайт, б.а. ар бир түгөй координаталар анык бир чекитти беришет, бирок бир чекитке анык бир r аралыгы жана чексиз көп бурчтук координатанын маанилери туура келет.

Кээде бир эле учурда полярдык да, тик бурчтуу да координаталар системасын колдонууга туура келет. Бул учурда бир координаталар системасынан экинчисине өтүү маселеси, б.а. чекиттин полярдык координаталарын билүү менен анын тик бурчтуу координаталарын аныктоо жана тескерисинче, чекиттин тик бурчтуу координаталарын билүү менен анын полярдык координаталарын аныктоо зарылчылыгы келип чыгат.

Эгерде берилген чекиттин (x,y) тик бурчтуу координаталары, ал эми (r,φ) полярдык координаталары болушса, анда

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \qquad (7.1)$$

формуласы полярдык координаталардан тик бурчтуу координаталарга өтүү формуласын, ал эми

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x}, \end{cases} \qquad (7.2)$$

формуласы тик бурчтуу координаталардан полярдык координаталарга өтүү формулаларын берет.

Мисал. $A(-2,2)$ чекитинин полярдык координаталарын тапкыла.

◊ (7.2) формуласын пайдаланабыз. $x=-2, y=2$ болгондуктан,

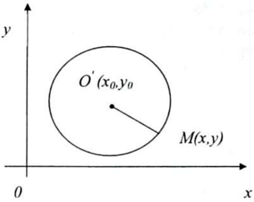
$$r = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, tg\varphi = -\frac{2}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4}.$$

Демек, A чекитинин полярдык координаталары $(2\sqrt{2}; 3\pi/4)$ ◊

§8. Экинчи тартиптеги ийри сызыктар. Айлана жана эллипс

Эң жөнөкөй экинчи тартиптеги ийри сызыктардын бири болгон айлананы үйрөнүүдөн баштайлы.

Айталы бизге борбору $O'(x_0, y_0)$ чекити жана радиусу R ге барабар болгон айлана берилсин (8.1-чийме). Бул айлананын теңдемесин жазалы. Айлананын каалагандай $M(x,y)$ чекити үчүн $O'M = R$ барабардыгы аткарылат. O' жана M чекиттеринин арасындагы аралыкты табуу үчүн (2.1) формуласын пайдаланабыз:



8.1-чийме

$$O'M = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Муну квадратка көтөрүп,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \qquad (8.1)$$

теңдемесин алабыз.

Айланадагы ар бир $M(x,y)$

чекитинин координаталары (8.1) теңдемесин канааттандырат. (8.1) - теңдемеси борбору $O'(x_0, y_0)$ чекити, радиусу R болгон *айлананын теңдемеси* деп аталат.

Эгерде айлананын борбору координата башталышы менен дал келсе, б.а. $x_0 = y_0 = 0$ болсо, анда (8.1) ден

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{8.2}$$

теңдемесине ээ болобуз.

Эми эки өзгөрмөлүү экинчи даражадагы теңдеменин жалпы түрүн карайлы:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,. \tag{8.3}$$

Мында A, B жана C лар бир убакта нөлгө барабар эмес, б.а. $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Кандай шарттарда (8.3) теңдемеси айлананын теңдемесин берээрин көрсөтөлү. Ушул максатта (8.1) теңдемесин төмөндөгү түрдө жазалы:

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0\,. \tag{8.4}$$

(8.3) жана (8.4) теңдемелери бир эле сызыкты аныкташ үчүн $B = 0$, ал эми калган коэффициенттери пропорционалдуу, айрым учурда $\dfrac{A}{1} = \dfrac{C}{1}$ болушу керек. Мындан $A = C \neq 0$ (же $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0, B = 0$) келип чыгат. Анда төмөндөгү теңдемеге ээ болобуз:

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0\,. \tag{8.5}$$

Бул *айлананын жалпы теңдемеси* деп аталат.

Анткени, (8.5) теңдемесинин эки жагын тең $A \neq 0$ га бөлүп жана x, y ти кармаган мүчөлөрүн толук квадратка чейин толуктап, төмөндөгүнү алабыз:

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2} \tag{8.6}$$

Ушул (8.6) теңдемесин айлананын (8.1) теңдемеси менен салыштырып, $A = C, B = 0, D^2 + E^2 - 4AF > 0$ болгон учурда, (8.3) формуласын же чындыгында эле айлананын теңдемесин берет деп жыйынтык чыгарууга болот. Бул шарттар орун алган учурда (8.6) айланасынын борбору $O\left(-\dfrac{D}{2A}; -\dfrac{E}{2A}\right)$ чекити, ал эми радиусу $R = \dfrac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2A}$ болот.

Мисал. $x^2 + y^2 + 16y - 9 = 0$ айланасынын радиусун жана борборунун координаттарын тапкыла.

◊ y ти кармаган мүчөлөрүн толук квадратка чейин толуктап, $x^2+(y^2+16y+64)-64-9=0$ же $x^2+(y+8)^2=73$ ээ болобуз. Демек, айлананын борбору $O(0;-8)$ чекитинде, ал эми радиусу $R=\sqrt{73}$ кө барабар болот. ◊

Экинчи тартиптеги (8.3) ийри сызыгын карайлы. Мында $B=0$ деп, болжолдоп, (8.3) теңдемесин төмөндөгү түрдө жазалы:

$$A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F.$$

Мындан, $x_0=-\frac{D}{2A}$; $y_0=-\frac{E}{2C}$; $\delta=\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F$

белгилөөлөрүн киийрсек, $A(x-x_0)^2+C(y-y_0)^2=\delta$ теңдемесин алабыз.

Жөнөкөйлүк үчүн ийри сызыктын борбору координата башталышы менен дал келет, б.а. $x_0=y_0=0$ деп алалы. Анда ийри сызыктын теңдемеси

$$Ax^2+Cy^2=\delta \tag{8.7}$$

түргө келет.

Эгерде A жана C коэффициенттери бирдей белгиде болушса, анда экинчи тартиптеги (8.7) ийри сызыгы *эллиптикалык типтеги ийри сызык же эллипс* деп аталат.

Аныктык үчүн $A>0, C>0$ деп алалы (тескери учурунда теңдеменин эки жагын тең (-1)ге көбөйтөбүз).

Мында төмөнкүдөй үч учур болушу мүмкүн: а) $\delta>0$; б) $\delta=0$; в) $\delta<0$.

(8.7) ийри сызыгы $\delta<0$ болгондо чыныгы чекиттерге ээ эмес, ал эми $\delta=0$ болсо, бир гана $O(0,0)$ чекитин берет.

$\delta>0$ учурун карайлы.

Бул учурда алынуучу

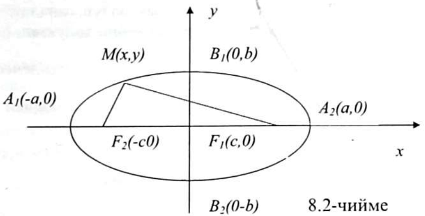
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{8.8}$$

теңдемеси жарым октору $a=\sqrt{\frac{\delta}{A}}$ жана $b=\sqrt{\frac{\delta}{C}}$ болгон *эллипстин каноникалык теңдемеси* деп аталат (8.2-чийме).

$a=b$ болгондо (8.8) теңдемеси айлананын $x^2+y^2=a^2$ теңдемесин берет.

$F_1(-c,0)$ жана $F_2(-c,0)$, мында

$$c=\sqrt{a^2-b^2} \tag{8.9}$$



8.2-чийме

чекиттери *эллипстин фокустары* деп, ал эми

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \qquad (8.10)$$

катышы *эллипстин эксцентриситети* деп атайбыз. Эксцентриситет эллипстин формасын мүнөздөйт жана $0 \le \varepsilon \le 1$ шартын канаатандырат. Айлана үчүн $\varepsilon = 0$ болот.

$A_1(-a,0), A_2(a,0), B_1(0,b), B_2(0,-b)$ чекиттери *эллипстин чокулары* деп аталышат.

Эллипстин каалагандай $M(x,y)$ чекитинен анын фокустарына чейинки аралыктардын суммасын табалы. (2.1) формуласы боюнча

$$d = F_2M + MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \; .$$

(8.8)-(8.10) формулаларын эске алсак:

$$F_2M = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + (a^2 - b^2) + \left(b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + 2cx + a^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}x + a\right)^2} = a + \varepsilon x.$$

$MF_1 = a - \varepsilon x$ экендигин ушул сыяктуу эле алууга болот.

Жыйынтыгында

$$d = F_2M + MF_1 = a + \varepsilon x + a - \varepsilon x = 2a,$$

б.а. эллипстин каалагандай чекитинен фокустарына чейинки аралыктардын суммасы $2a$ га барабар болгон турактуу чондук болот. Эллипстин бул *мүнөздүк касиетин* эллипстин аныктоосу катары кабыл алууга болот.

Мисал. $x^2+2y^2-4x+16y=0$ ийри сызыгынын түрүн аныктагыла.

◊ $A=1, C=2$ бирдей белгидеги сандар болгондуктан, берилген теңдеме эллиптикалык типтеги ийри сызык болуп саналат. x жана y ти кармаган мүчөлөрүн толук квадратка чейин толуктап,

$(x-2)^2+2(y+4)^2=36$ же $\dfrac{(x-2)^2}{6^2}+\dfrac{(y+4)^2}{(3\sqrt{2})^2}=1$ теңдемесине ээ болобуз. Бул борбору $O(2,-4)$ чекитинде, ал эми жарым октору $a=6$ жана $b=3\sqrt{2}$ болгон эллипсти берет ◊

§9. Гипербола жана парабола

Эгерде A жана C коэффициенттери карама-каршы белгиде, б.а. $AC<0$ болсо, анда (8.7) түрүндөгү экинчи тартиптеги ийри сызык *гиперболикалык типтеги ийри сызык же гипербола* деп аталат.

Айталы $A>0, C<0$ болсун. Төмөндөгү үч учур болушу мүмкүн:

1) $\delta>0$; 2) $\delta=0$; 3) $\delta<0$.

$\delta>0$ болгондо каноникалык теңдемеси

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{9.1}$$

түрүндө болгон гиперболага ээ болобуз.

$a=\sqrt{\dfrac{\delta}{A}}$ *чыныгы жарым ок,* $b=\sqrt{\dfrac{\delta}{-C}}$ *мнимый жарым ок* деп аталышат (9.1-чийме).

$F_1(c,0)$ жана $F_2(-c,0)$, $c=\sqrt{a^2+b^2}$ чекиттери гиперболанын *фокустары* болуп эсептелет, ал эми *эксцентриситети* $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ бирден чоң болгон каалагандай маанини кабыл алат. $A_1(a,0)$ жана $A_2(-a,0)$ чекиттери гиперболанын *чокулары* деп аталышат.

Эллипс үчүн көрсөтүлгөндөй эле гипербола үчүн да мүнөздүк касиетти көрсөтүүгө болот. Төмөнкү *мүнөздүк касиет* гиперболанын аныктамасы катары да кабыл алынат: гиперболанын каалагандай чекитинен анын фокустарына чейинки аралыктардын айырмасы $d=|F_2M-MF_1|=2a$ га барабар болгон турактуу чоңдукту берет.

Гиперболанын (9.1) теңдемесин

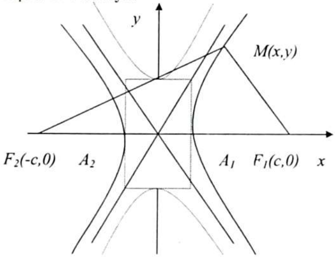
$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \tag{9.2}$$

түрүндө жазалы.

Жетишээрлик чоң x үчүн $\sqrt{x^2-a^2} \approx \sqrt{x^2} = x$ болот жана (9.2) теңдемеси $y \approx \pm\frac{b}{a}x$ түрүнө келет, б.а. $x \to \infty$ умтулганда гиперболанын тармактары $y \approx \pm\frac{b}{a}x$ түз сызыктарына жетишээрлик жакындайт. Бул түз сызыктар *гиперболанын асимптоталары* деп аталышат.

Тең жактуу $x^2 - y^2 = a^2 \,(a=b)$ гиперболасы үчүн $y = \pm x$ асимптоталары өз ара перпендикулярдуу болуп, координаталык бурчтардын биссектрисасын түзүшөт.

Эми $\delta = 0$ болгондо (8.7) ийри сызыгы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ көрүнүшүндө болот, б.а. кесилишүүчү $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ жана $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ түгөй түз сызыктарга ээ болобуз.



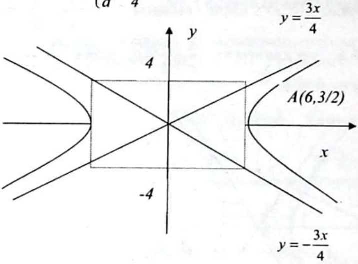
9.1-чийме

$\delta < 0$ болгондо жарым октору $a = \sqrt{\frac{\delta}{-A}}$ жана $b = \sqrt{\frac{\delta}{C}}$ болгон $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ гиперболасын алабыз. Бул гипербола (9.1) гиперболасына *түйүндөш* деп аталат (9.1-чиймеде пунктир сызык менен көрсөтүлгөн).

Мисал. Асимптоталары $y = \pm\frac{3}{4}x$ болгон жана $\left(6;\frac{3}{2}\right)$ чекити аркылуу өтүүчү гиперболанын теңдемесин жазгыла жана чокуларынын арасындагы аралыкты тапкыла.

◊ $\left(6;\dfrac{3}{2}\right)$ чекити изделүүчү гиперболада жаткандыктан жана гиперболанын асимптоталары $y=\pm\dfrac{b}{a}x=\pm\dfrac{3}{4}x$ болгондуктан, берилген чекиттин координаттары төмөнкү системаны канааттандыруусу керек:

$$\begin{cases}\dfrac{36}{a^2}-\dfrac{9}{4b^2}=1,\\ \dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{4}.\end{cases}$$



9.2 − чийме

Бул системаны чыгаруу менен $a=4\sqrt{2};b=3\sqrt{2}$ маанилерин алабыз. Гиперболанын изделүүчү теңдемеси $\dfrac{x^2}{32}-\dfrac{y^2}{18}=1$ (9.2-чийме) түрүндө болот. Ал эми чокуларынын арасындагы аралык $2a=2\cdot 4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$ ге барабар ◊

Эми

$$y=\frac{m}{x} \qquad \text{же} \qquad xy=m \tag{9.3}$$

теңдемеси менен берилүүчү *тескери пропорционалдуу* көз карандылыкты карайлы.

Жаңы Ox' жана Oy' октору катары координаттык бурчтардын биссектрисаларын алып, (9.3-чийме), (9.3) теңдемесин жаңы x' жана y' координаталары аркылуу туюнтабыз.

Айталы $OM=r$ болсун, анда OMB үч бурчтугунан $r\cos\alpha=x', r\sin\alpha=y'$ болгондуктан,

$$x = r\cos(45^0 + \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}(r\cos\alpha - r\sin\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'),$$

$$y = r\sin(45^0 + \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}(r\cos\alpha + r\sin\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$$

болот.

Эми жаңы $Ox'y'$ координаталар системасында (9.3) теңдемеси $x'^2 - y'^2 = 2m$ түрүндө болот. Демек, тескери пропорционалдуу көз карандылыктын графиги асимптоталары координаталык октор болгон тең жактуу гипербола болот. $m > 0$ болгондо гиперболанын тармактары I жана III чейректе, ал эми $m < 0$ болгондо II жана IV чейректе жайгашат.

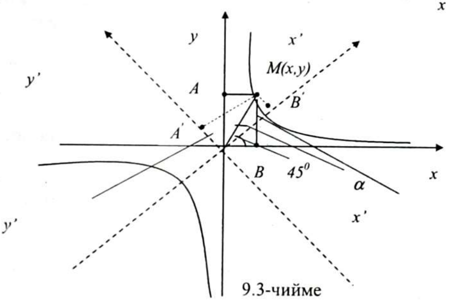
Эми

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, c \neq 0, bc - ad \neq 0 \tag{9.4}$$

бөлчөктүү сызыктуу функциясынын графигин карайлы. (9.4)тү өзгөртүп түзөбүз.

$$y = \frac{a\left(x + \frac{b}{a}\right)}{c\left(x + \frac{d}{c}\right)} = \frac{a\left[\left(x + \frac{d}{c}\right) + \frac{b}{a} - \frac{d}{c}\right]}{c\left(x + \frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} + \frac{(bc - ad)/c^2}{x + \frac{d}{c}}.$$

Жаңы $x + \frac{d}{c} = x', y - \frac{a}{c} = y'$ координаталарын жана $m = \frac{bc - ad}{c^2}$ белгилөөсүн кийрели. Анда координаталык окторду жарыш көчүрүүдөн алынган жана борбору $O'\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ чекити болгон жаңы $Ox'y'$ координаталык тегиздигинде (9.3) теңдемеси $y' = \frac{m}{x'}$ же



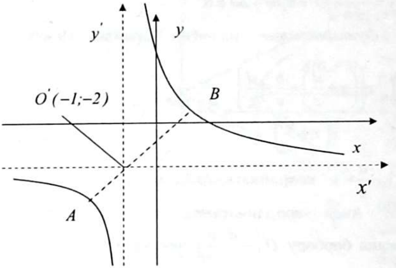
9.3-чийме

$x'y'=m$ түрүнө келет. Демек, (9.4) *бөлчөктүү сызыктуу функциянын графиги* $x=-\frac{d}{c}, y=\frac{a}{c}$ асимптоталары координаталык окторго жарыш болушкан тең жактуу гипербола болуп саналат.

Мисал. $y=\frac{3-2x}{x+1}$ гиперболасынын чокуларынын, борборунун координаталарын тапкыла жана асимптотасынын теңдемесин жазгыла.

◊ Бөлчөктүү сызыктуу функциянын бүтүн бөлүгүн бөлүп алалы:

$$y=\frac{-2(x+1)+5}{x+1}=-2+\frac{5}{x+1}\Rightarrow y+2=\frac{5}{x+1}\Rightarrow(x+1)(y+2)=5.$$



9.4-чийме

$x+1=x'; y+2=y'$ деп белгилесек, $x'y'=5$ ке ээ болобуз, б.а. берилген теңдеме борбору $O'(-1,-2)$, ал эми асимптоталары $x+1=0; y+2=0$ болгон тең жактуу гиперболаны берет (9.4-чийме). $m=5>0$ болгондуктан, гипербола I жана III чейректерде жатат. Ал эми чокуларынын жаңы координаталары $(\pm\sqrt{5};\pm\sqrt{5})$. Биз $x=x'-1, y=y'-2$ формулаларынын жардамында эски координаталарга өтсөк, гиперболанын чокуларынын $A(-\sqrt{5}-1;-\sqrt{5}-2), B(\sqrt{5}-1;\sqrt{5}-2)$ эски координаталарын аныктайбыз.

Айталы экинчи тартиптеги ийри сызыктын (8.3) теңдемесиндеги $B=0$, ал эми A жана C коэффициенттеринин бири нөлгө барабар болсун. Аныктык үчүн $A=0, C\neq 0$, б.а.

$$Cy^2+Dx+Ey+F=0. \tag{9.5}$$

Ошондой эле $D\neq 0$ болсун. Теңдемеденин y ти кармаган мүчөлөрүн толук квадратка чейин толуктап:

$$C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=-Dx-F+\frac{E^2}{4C}$$

жана

$$x_0=-\frac{F}{D}+\frac{E^2}{4DC},\ y_0=-\frac{E}{2C},2p=-\frac{D}{C}$$

деп белгилесек, анда

$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0) \tag{9.6}$$

теңдемесин алабыз.

Ушул (9.6) ийри сызыгын *парабола* деп атайбыз, ал эми $O(x_0,y_0)$ чекити *параболанын чокусу*, p- параболанын *параметри* деп аталат. $p>0$ болгондо параболанын тармактары оңго, $p<0$ болгондо солго багытталат (9.5-чийме). $y=y_0$ түз сызыгы параболанын симметрия огу болуп саналат.

Эгерде параболанын чокулары координата башталышында жайланышса, анда (9.6) теңдемеси

$$y^2=2px \tag{9.7}$$

түрүнө келет.

$F\left(\frac{p}{2};0\right)$ чекити параболанын *фокусу* деп, ал эми $x=-\frac{p}{2}$ түз сызыгын анын *директрисасы* деп айтылат.

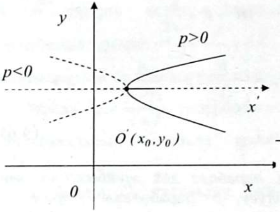
Параболанын каалагандай $M(x,y)$ чекитинен анын фокусуна чейинки аралык

$$r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{x^2-px+\frac{p^2}{4}+2px}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}=x+\frac{p}{2}$$

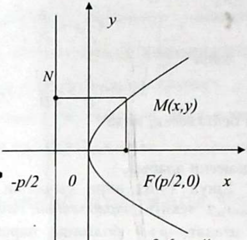
формуласы боюнча, ал эми директрисага чейинки аралык $MN=x+\frac{p}{2}$ формуласы менен аныкталат (9.6-чийме).

Ошентип, парабола берилген чекиттен (фокустан) жана берилген түз сызыктан (директрисадан) бирдей алыстатылган тегиздиктин бардык чекиттеринин көптүгүн берет. Параболанын бул *мүнөздүк касиетин* анын *аныктамасы* катары да кароого болот.

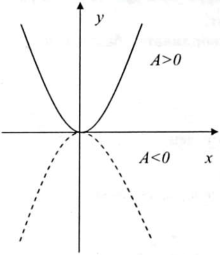
Эгерде (9.7) теңдемесиндеги x жана y тердин орундарын алмаштырсак, анда чокусу координата башталышында жайгашкан, ордината огуна карата симметриялуу болгон параболанын $x^2=2py$ теңдемесине ээ болобуз. Бул теңдеме көп учурда $y=Ax^2;A=\frac{1}{2p}$ түрүндө жазылат. $A>0$ болгондо параболанын тармактары жогору, $A<0$ болгондо төмөн багытталат (9.7-чийме).



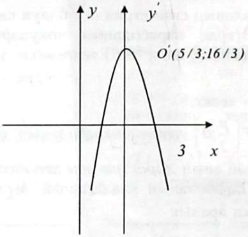
9.5-чийме



9.6-чийме



9.7-чийме



9.8-чийме

$y = Ax^2 + Bx + C\ (A \neq 0)$ квадраттык үч мүчөсүн карайлы. Мындан,

$$y = A\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}\right) = A\left[\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A^2}\right] =$$

$$= A\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A}. \qquad (9.8)$$

$x + \dfrac{B}{2A} = x',\ y - \dfrac{4AC - B^2}{4A} = y'$ деп белгилесек, анда борбору $O'\left(-\dfrac{B}{2A};\ \dfrac{4AC - B^2}{4A}\right)$ чекити болгон жаңы $Ox'y'$ координаталар системасында (9.8) теңдемеси $y' = Ax'^2$ түрүндө жазылат.

Демек, $y = Ax^2 + Bx + C$ квадраттык үч мүчөсүнүн графиги чокусу $O'\left(-\dfrac{B}{2A};\dfrac{4AC - B^2}{4A}\right)$ чекити жана симметрия огу Oy огуна параллель $x = -\dfrac{B}{2A}$ түз сызыгы болгон параболаны берет ◊

Мисал. $y = -3x^2 + 10x - 3$ ийри сызыгын тургузгула.

◊ x^2тин коэффициентин кашаанын сыртына чыгарып, теңдеменин оң жагын толук квадратка чейин толуктап, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$y = -3\left(x^2 - \frac{10x}{3} + 1\right) = -3\left[\left(x^2 - \frac{2\cdot 5}{3}x + \frac{25}{9}\right) - \frac{25}{9} + 1\right] =$$

$$= -3\left[\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{16}{9}\right] = -3\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{16}{9} \Rightarrow y - \frac{16}{3} = -3\left(x - \frac{5}{3}\right)^2.$$

$x - \dfrac{5}{3} = x'$, $y - \dfrac{16}{3} = y'$ белгилөөлөрүн пайдалансак, $y' = -3x'^2$ ийри сызыгын алабыз. Демек, берилген ийри сызык чокусу $O' = \left(\dfrac{5}{3};\dfrac{16}{3}\right)$ чекити жана $O'y'$ симметрия огу Oy огуна жарыш болгон параболаны алабыз (9.8-чийме) ◊

Көнүгүүлөр

1.1. $A(-2;-7)$ чекитин тургузгула.

1.2. Чокулары $A(1;2), B(-3;4), C(2;-1)$ чекиттери болгон үч бурчтуктун жактарынын узундуктарын эсептегиле.

1.3. $A(5;2)$ жана $B(3;-1)$ чекиттери аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемесин жазгыла.

1.4. $A(2;-3)$ жана $B(-4;5)$ чекиттеринен бирдей аралыкка алыстатылган чекиттердин көптүгүнүн теңдемесин жазгыла.

1.5. Координата башталышынан $4x + 3y - 16 = 0$ түз сызыгына чейинки аралыкты тапкыла.

1.6. $A(-5;2)$ чекитинен $4x + 3y - 16 = 0$ түз сызыгына чейинки аралыкты тапкыла.

1.7. Төмөндөгү түз сызыктардын бурчтук коэффициенттерин тапкыла:

а) $9x + 3y - 1 = 0$; б) $x - 2y + 5 = 0$; в) $7x - 5y + 1 = 0$

г) $y - 11 = 0$.

1.8. $2x-y+5=0$ жана $3x+y-1=0$ түз сызыктарынын арасындагы бурчту тапкыла.

1.9. Төмөндөгү түз сызыктардын арасындагы бурчту тапкыла:
а) $y=2x-5, y=-0,5x+1$; б) $y=5x+3, y=0,75x+7$;
в) $y=3x-1, y=3x+2$.

1.10. $A(3;4)$ чекити аркылуу өтүп, $y=5x+3$ түз сызыгына жарыш болгон түз сызыктын теңдемесин жазгыла.

1.11. $M_0(-1;2)$ чекити аркылуу өтүп, $3x-y+4=0$ түз сызыгына жарыш болгон түз сызыктын теңдемесин жазгыла.

1.12. $A(2;-1)$ чекити аркылуу өтүп, $y=-3x-1$ түз сызыгына перпендикуляр болгон түз сызыктын теңдемесин жазгыла.

1.13. Үч бурчтуктун $A(3;5), B(-1;2), C(-3;-3)$ чокулары берилген. Бул үч бурчтуктун A чокусунан жүргүзүлгөн бийиктиктин, биссектрисанын жана медиананын теңдемелерин жазгыла.

1.14. Эгерде чекиттин полярдык координаталары төмөндөгүдөй болсо, анда анын тик бурчтуу координаталарын тапкыла:
$A\left(3;\frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(1;\frac{2\pi}{3}\right)$, $C(4;0)$, $D\left(2;\frac{3\pi}{3}\right)$, $E(5;\pi)$, $F\left(\frac{3}{2};\frac{7\pi}{4}\right)$, $G\left(1;\frac{\pi}{2}\right)$.

1.15. Эгерде чекиттин тик бурчтуу координаталары төмөндөгүдөй болсо, анда анын полярдык координаталарын тапкыла:
$A(2;2), B(0;3), C(-1;-1), D(-2;0), E(5;-5), F(-4;4)$.

1.16. Төмөндөгү айланалардын радиусун жана борборунун координаталарын тапкыла:
а) $x^2+4x+y^2-5=0$; б) $x^2+y^2-6y-16=0$;
в) $x^2+y^2-6x+4y-1=0$; г) $x^2+y^2-2x+6y+10=0$;
д) $2x^2+2y^2-5x+3y=0$; е) $5x^2+5y^2-10x+15y-2=0$.

1.17. $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ эллипси берилген. Анын фокустарын, эксцентриситетин тапкыла жана директрисасынын теңдемесин жазгыла.

1.18. $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$ гиперболасынын жарым окторун, фокустарынын координаталарын жана эксцентриситетин тапкыла.

1.19. $\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y+3)^2}{9}=1$ гиперболасынын эксцентриситетин тапкыла. Асимптотасынын жана директрисасынын теңдемесин жазгыла.

1.20. Эгерде

а) парабола $M(2;6)$ чекити аркылуу өтсө;

б) фокусунан директрисага чейинки аралык 8 ге барабар;

в) параболанын чокусунан фокусуна чейинки аралык 3 кө барабар болсо, анда чокусу координата башталышы жана Ox огуна симметриялуу болгон параболанын теңдемесин жазгыла.

ЭКИНЧИ ГЛАВА
ВЕКТОРЛОР

§1. Векторлор жана алардын үстүнөн жүргүзүлүүчү амалдар. R^n мейкиндиги

Мектеп курсунан өтүлгөн материалдарды эске сала кетели. Эгерде тегиздикте тик бурчтуу координаталар системасын киргизсек, анда ар бир $\bar{a}$ векторуна (багытталган кесиндисине) бул вектордун координаталары болушкан a_1, a_2 түгөй сандары тиешелүү болот да, ал тиешелүүлүктү $\bar{a} = (a_1, a_2)$ барабардыгынын жардамы менен жазабыз. Ал эми үч өлчөмдүү мейкиндикте $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ түрүндө жазылат.

Мисал. Завод эркектердин, аялдардын жана балдардын велосипеддерин чыгарсын. Анда заводдун жыл ичиндеги өндүрүш көлөмүн $V(M, L, D)$ вектору аркылуу жазууга болот. Мында M – эркектер үчүн, L – аялдар үчүн, D – балдар үчүн жыл ичинде чыгарылган велосипеддердин саны. Айталы, 2000-жылдагы өндүрүш көлөмү $V_{2000} = (1000, 800, 4000)$ болсун. Ал эми 2001-жылдагы өндүрүүнүн планы 2000-жылдагы өндүрүү көлөмүнө караганда 10% ке көп болсун. Анда бул план болуп, $V_{2001} = (1100, 880, 4400)$ вектору эсептелет. «Велосипед» фирмасы, бул завод өндүргөн продукциянын жарымын сатып алсын. Анда бул фирманын 2000-жылы сатып алган продукциянын көлөмүн $W = (500, 400, 2000)$ вектору аркылуу жазууга болот. Айталы мамлекетте велосипед чыгаруучу 3 гана завод болсун жана бул заводдордун 2000-жылдагы өндүрүш көлөмдөрү $Q_1 = (1000, 800, 400)$, $Q_2 = (1000, 600, 2000)$, $Q_3 = (2000, 1600, 8000)$ болсун. Анда бардык 3 завод биригип өндүргөн продукция $Q = (4000, 3000, 14000)$ вектору болот, б.а. 4000 даана эркектер үчүн, 3000 даана аялдар үчүн жана 14000 даана балдар үчүн велосипеддер чыгарылат.

Келтирилген $V_{2000}, V_{2001}, W, Q_1, Q_2, Q_3, Q$ чоңдуктары векторлорго конкреттүү мисалдар болушат.

Бул фактыларды жалпылоо менен төмөнкү аныктаманы берүүгө болот.

1 - аныктама. n - өлчөмдүү арифметикалык *векторлор* деп, n чыныгы $a_1, a_2, ..., a_n$ сандарынын каалагандай удаалаштыгын айтышат жана $\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ деп белгиленет. $\bar{a}$ векторун түзүүчү $a_1, a_2, ..., a_n$ сандары бул вектордун координаталары деп аталышат.

Мисал. $\overline{a}=(-2;4;1;1;0)$ – бул координаталары $(-2;4;1;1;0)$ болгон вектор.

Бир өлчөмдүү, эки өлчөмдүү жана үч өлчөмдүү арифметикалык векторлор гана геометриялык сүрөттөлүшкө ээ болушат. Бир өлчөмдүү векторлор сан түз сызыгындагы; эки өлчөмдүү векторлор тегиздиктеги; үч өлчөмдүү векторлор мейкиндиктеги багытталган кесиндилерди мүнөздөшөт.

2-аныктама. Эгерде $a_1=b_1, a_2=b_2, ..., a_n=b_n$, б.а. тиешелүү координаталары барабар болушса, анда бирдей өлчөмдүү $\overline{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ жана $\overline{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$ векторлору *барабар* деп аталышат. Векторлордун барабардыгы $\overline{a}=\overline{b}$ деп белгиленет.

3-аныктама. Бирдей өлчөмдүү $\overline{a}$ жана $\overline{b}$ векторлорунун *суммасы* деп, $\overline{a}+\overline{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, ..., a_n+b_n)$ вектору аталат.

Векторлордун суммасы үчүн төмөнкү касиеттер орун алат:

1^0. $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ – орун алмаштыруу касиети;

2^0. $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})+\overline{b}$ – топтоштуруу касиети;

$\overline{z}=(0,0,...,0)$ вектору нөлдүк вектор деп аталат жана $\overline{0}$ деп белгиленет;

3^0. Каалагандай $\overline{a}$ вектору үчүн $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$ барабардыгы орун алат.

$(-a_1,-a_2,...,-a_n)$ вектору $\overline{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ векторуна *карама-каршы вектор* деп аталат жана $-\overline{a}$ деп белгиленет.

4^0. $\overline{a}+(-\overline{a})=0$.

4-аныктама. $\overline{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ векторунун k *санына болгон көбөйтүндүсү* деп, $\overline{ka}=(ka_1,ka_2,...,ka_n)$ вектору аталат.

Векторду санга көбөйтүү төмөндөгүдөй касиеттерге ээ:

1^0. $k(\overline{a}+\overline{b})=k\overline{a}+k\overline{b}$, $(k+l)\overline{a}=k\overline{a}+l\overline{a}$;

2^0. $k(l\overline{a})=(kl)\overline{a}$;

3^0. $1\cdot\overline{a}=\overline{a}$.

5-аныктама. Жогорудагы векторлорду кошуу жана санга көбөйтүү операциясы аткарылган бардык n-өлчөмдүү векторлордун көптүгү *n- өлчөмдүү вектордук мейкиндик* деп аталат жана R^n менен белгиленет.

§2. Векторлордун скалярдык көбөйтүндүсү

Векторлордун скалярдык көбөйтүндүсүн мисал келтирүү менен баштайлы.

Мисал. Студенттерден турган группа Европалык борборлорго туристтик жүрүшкө чыгышты. Саякаттын аягында аларда төмөнкүдөй валюталар калган: 15 франк(Франция); 10

фунт стерлинг (Британия); 20 гульден (Голландия) жана 25 марка (Германия). Бул калдыктар $\overline{a}=(15;10;20;25)$ валюталык векторун түзүшөт. Студенттер бул валюталардын баарын сомго айландырып, банкет уюштурууну чечишти. Алар алмаштыруу пунктунан валюталардын курстарын аныкташты:

1 франк – 1000 сом, 1 фунт стерлинг - 7500 сом,

1 гульден – 3000 сом, 1 марка - 3 500 сом.

Ошентип, бизде валюталарды алмаштыруу курсунан турган дагы бир $\overline{b}=(1000;7500;3000;3500)$ вектору пайда болду. Банкетте канча сом боло тургандыгын аныктоо үчүн төмөнкү эсептөөнү жүргүзүү керек:

$$15\cdot 1000+10\cdot 7500+20\cdot 3000+25\cdot 3500=237500\,.$$

Аныктама. $\overline{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ жана $\overline{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$ *векторлорунун скалярдык көбөйтүндүсү* деп, $(\overline{a},\overline{b})=a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n$ саны аталат.

Скалярдык көбөйтүндүнүн негизги касиеттери:

1^0. $(\overline{a},\overline{b})=(\overline{b},\overline{a})$;

$(\overline{a},\overline{b})=a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n=b_1a_1+b_2a_2+...+b_na_n=(\overline{b},\overline{a})$.

2^0. $(k\overline{a},\overline{b})=k(\overline{b},\overline{a})$;

3^0. $(\overline{a},\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a},\overline{b})+(\overline{a},\overline{c})$;

4^0. Эгерде $\overline{a}\neq 0$ болсо, анда $(\overline{a},\overline{a})>0$ болот. Ал эми $\overline{a}=0$ болсо, анда $(\overline{a},\overline{a})=0$ болот.

R^3 мейкиндигинин векторлору үчүн скалярдык көбөйтүндү $(\overline{a},\overline{b})=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\varphi$ формуласы менен бизге белгилүү, мында

$$|\overline{a}|=\sqrt{(\overline{a},\overline{a})}\,, \qquad (2.1)$$

$$\cos\varphi=\frac{(\overline{a},\overline{b})}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|},\ \ \overline{a}\neq 0,\overline{b}\neq 0\,. \qquad (2.2)$$

R^n мейкиндигиндеги векторлор үчүн $\overline{a}$ векторунун модулу $|\overline{a}|$ жана $\overline{a},\overline{b}\,(\overline{a},\overline{b}\neq\overline{0})$ векторлорунун арасындагы φ бурчунун косинусу тиешелүү (2.1) жана (2.2) формулаларынан аныкталат.

(2.2) формуласына түшүндүрмө бере кетели. $\cos\varphi=c$ (φ - белгисиз сан) теңдемеси $-1\leq c\leq 1$ үчүн гана чыгарылышка ээ болот. Ошондуктан, векторлордун арасындагы бурчту аныктоо корректтүү болушу үчүн, $\dfrac{(\overline{a},\overline{b})}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}$ саны –1 менен 1 дин арасында камтылгандыгын көрсөтүү керек. Бул шарт төмөндөгү барабарсыздыктан келип чыгат.

Теорема (Коши-Буняковскийдин барабарсыздыгы).
R^n мейкиндигинен алынган каалагандай $\overline{a}$ жана $\overline{b}$ эки вектору үчүн

$$(\overline{a},\overline{b})^2 \le (\overline{a},\overline{a})\cdot(\overline{b},\overline{b}) \qquad (2.3)$$

барабарсыздыгы орун алат.

□ Кандайдыр бир t санын алып $\overline{c}=t\overline{a}+\overline{b}$ векторун түзөлү. Бул вектордун өзүнө болгон скалярдык көбөйтүндүсүн табалы: $(\overline{c},\overline{c})=(t\overline{a}+\overline{b},t\overline{a}+\overline{b})=(t\overline{a}+\overline{b},t\overline{a})+(t\overline{a}+\overline{b},\overline{b})=(t\overline{a},t\overline{a})+(\overline{b},t\overline{a})+(t\overline{a},\overline{b})+(\overline{b},\overline{b})=t^2(\overline{a},\overline{a})+2t(\overline{a},\overline{b})+(\overline{b},\overline{b})$.

$\alpha=(\overline{a},\overline{a}),\beta=(\overline{a},\overline{b}),\gamma=(\overline{b},\overline{b})$ деп белгилейли. Анда $(\overline{c},\overline{c})=t^2\alpha+2t\beta+\gamma$.

Акыркы барабардыктын оң жагында келип чыккан $t^2\alpha+2t\beta+\gamma$ квадраттык үч мүчөсү t нын каалагандай маанисинде терс эмес $((\overline{c},\overline{c})\ge 0)$, анда анын дискриминанты $D=b^2-4ac=4\beta^2-4\alpha\gamma\le 0$ болот. Демек, $\beta^2-\alpha\gamma\le 0$ же $(\overline{a},\overline{b})^2-(\overline{a},\overline{a})\cdot(\overline{b},\overline{b})\le 0$ бул (2.3) тү берет □

§3. Сызыктуу көз каранды жана сызыктуу көз каранды эмес векторлор системасы

Сызыктуу алгебрадагы негизги түшүнүктөрдүн бири болуп сызыктуу көз карандылык түшүнүгү эсептелет.

Эгерде бизге кандайдыр бир маселелерди чечүүдө бир нече векторлор менен эсептөө жүргүзүүгө туура келсе, анда алардын баарын бир эле $\overline{a}$ тамгасынын түрдүү индекстери аркылуу белгилеп алабыз. Бардык $\{\overline{a_1},\overline{a_2},...,\overline{a_s}\}$ жыйыны *векторлор системасы* деп аталат.

1-аныктама. Айталы R^n мейкиндигинен $\overline{a_1},\overline{a_2},...\overline{a_s}$ векторлору берилсин. Анда

$$\overline{a}=k_1\overline{a_1}+k_2\overline{a_2}+...+k_S\overline{a_S} \qquad (3.1)$$

түрүндөгү каалагандай $\overline{a}$ вектору $\overline{a_1},\overline{a_2},...,\overline{a_s}$ векторлорунун *сызыктуу комбинациясы* деп аталат. Мында $k_1,k_2,...,k_S$ каалагандай сандар.

(3.1) барабардыгы орун алган учурда $\overline{a}$ вектору $\overline{a_1},\overline{a_2},...,\overline{a_s}$ векторлору аркылуу *сызыктуу туюнтулат* же $\overline{a_1},\overline{a_2},...,\overline{a_s}$ векторлору боюнча *ажырайт* деп да айтышат.

Мисал. Эгерде $\overline{a_1}=(1;1;2)$, $\overline{a_2}=(-1;0;5)$, $\overline{a_3}=(3;2;-4)$ болсо, анда $3\overline{a_1}-5\overline{a_2}-\overline{a_3}=(3;3;6)-(-5;0;25)-(3;2;-4)=(5;1;-15)$. Демек $(5;1;-15)$ вектору $\overline{a_1},\overline{a_2},\overline{a_3}$ векторлорунун сызыктуу комбинациясы болуп саналат.

2-аныктама. Эгерде бир убакта нөлгө барабар эмес ушундай бир $c_1,c_2,...,c_s$ сандары табылып,

$$c_1\overline{a_1}+c_2\overline{a_2}+...+c_s\overline{a_s}=0 \qquad (3.2)$$

барабардыгы орун алса, анда R^n мейкиндигинин $\overline{a_1},\overline{a_2},...,\overline{a_s}$ векторлор системасы *сызыктуу көз каранды (СКК)* деп аталышат.

3-аныктама. Эгерде $\overline{a_1},\overline{a_2},...,\overline{a_s}$ векторлор системасы үчүн (3.2) - барабардыгы $c_1=c_2=...=c_s=0$ болгондо гана орун алса, анда бул векторлор системасы *сызыктуу көз каранды эмес (СККЭ)* деп аталышат.

Сызыктуу көз карандылыктын бир нече касиеттерин санап өтөлү.

1^0. Бир гана $\overline{a}$ векторунан турган система сызыктуу көз каранды болушу үчүн $\overline{a}=\overline{0}$ болушу зарыл жана жетиштүү.

□ Айталы $\overline{a}$ векторунан гана турган $\{\overline{a}\}$ системасы сызыктуу көз каранды болсун. Анда ушундай бир $c\neq 0$ саны табылып, $c\overline{a}=\overline{0}$ болот. Бул барабардыктын эки жагын теп c^{-1} санына көбөйтөлү:

$$c^{-1}(c\overline{a})=c^{-1}\cdot\overline{0}\Rightarrow(c^{-1}c)\overline{a}=\overline{0}\Rightarrow 1\cdot\overline{a}=\overline{0}\Rightarrow\overline{a}=\overline{0}.$$

Тескерисинче, эгерде $\overline{a}=\overline{0}$ болсо, анда $1\cdot\overline{a}=\overline{0}$ барабардыгы $\{a\}$ системасынын сызыктуу көз каранды экендигин көрсөтөт □

2^0. Бирден көп вектордон турган система сызыктуу көз каранды болот, качан гана берилген векторлордун арасында калгандары аркылуу сызыктуу туюнтула турган вектор болсо.

□ Айталы $\overline{a_1},\overline{a_2},...,\overline{a_s}$ векторлорунун арасында $\overline{a_1}$ вектору калгандары аркылуу сызыктуу туюнтулсун, б.а. $\overline{a_1}=k_2\overline{a_2}+...+k_s\overline{a_s}$. Бул барабардыктын эки жагына тең $-\overline{a_1}$ векторун кошолу $-\overline{a_1}+k_2\overline{a_2}+...+k_s\overline{a_s}=\overline{0}$. Мында $\overline{a_1},\overline{a_2},...,\overline{a_s}$ векторлорунун сызыктуу комбинациясы 0 гө барабар жана коэффициенттердин арасында 0 дон айырмалуусу да (a_1 коэффиценти -1 ге барабар) бар. Демек, $\overline{a_1},\overline{a_2},...,\overline{a_s}$ системасы сызыктуу көз каранды болот.

Тескерисинче $\overline{a_1},\overline{a_2},...,\overline{a_s}$ векторлору сызыктуу көз каранды болсун, б.а. (3.2) барабардыгында $c_1,c_2,...,c_s$ коэффициенттери бир убакта нөлгө барабар эмес болсун. Айталы, $c_1\neq 0$ болсун. (3.2) ни

$$-c_1\overline{a_1}=c_2\overline{a_2}+...+c_s\overline{a_s}$$

түрүндө жазып алабыз жана эки жагын тең $-c_1^{-1}$ санына көбөйтөбүз, натыйжада төмөндөгүнү алабыз:

$$-c_1^{-1}(-c_1\overline{a_1})=-c_1^{-1}(c_2\overline{a_2}+...+c_s\overline{a_s})\Rightarrow\overline{a_1}=-\left(\frac{c_2}{c_1}\right)\overline{a_2}-...-\left(\frac{c_s}{c_1}\right)\overline{a_s},$$

б.а. $\overline{a_1}$ вектору векторлор системасынын калган векторлору аркылуу сызыктуу туюнтулат □

3^0. Эгерде системанын кандайдыр бир бөлүгү сызыктуу көз каранды болсо, анда берилген система да сызыктуу көз каранды болот.

Натыйжа. $\overline{0}$ векторду кармап турган система сызыктуу көз каранды болот.

□ Айталы бизге $\overline{a_1},\overline{a_2},\overline{a_3}$ векторлорунан турган система берилсин жана $\overline{a_2},\overline{a_3}$ эки векторунан турган системанын бөлүгү сызыктуу көз каранды болсун, б.а. $c_2\overline{a_2}+c_3\overline{a_3}=0$, (мында $c_2\neq 0$ же $c_3\neq 0$) барабардыгы орун алсын. Барабардыктын эки жагына тең $\overline{0}=0\cdot\overline{a_1}$ векторун кошолу:

$$0\cdot\overline{a_1}+c_2\overline{a_2}+c_3\overline{a_3}=0. \tag{3.3}$$

Бул барабардык берилген системанын сызыктуу көз каранды экендигин көрсөтөт □

4^0. Эгерде $\{\overline{a_1},\overline{a_2},...,\overline{a_s}\}$ векторлор системасы сызыктуу көз каранды эмес болуп, бирок бул системага $\overline{a}$ векторун кошуудан сызыктуу көз каранды система келип чыкса, анда $\overline{a}$ вектору $\{\overline{a_1},\overline{a_2},...,\overline{a_s}\}$ векторлору аркылуу сызыктуу туюнтулат .

□ Шарт боюнча $c_1\cdot\overline{a_1}+c_2\overline{a_2}+...+c_s\overline{a_s}+c\overline{a}=0$ орун алат дегенди билдирет. Мында $c_1,c_2,...,c_s,c$ коэффициенттеринин баары 0гө барабар эмес. $c\neq 0$ экендигин көрсөтүүгө болот. Эгерде $c=0$ десек, анда биз $\{\overline{a_1},\overline{a_2},...,\overline{a_s}\}$ векторлор системасынын сызыктуу көз карандылыгын көрсөтүүчү $c_1\cdot\overline{a_1}+c_2\overline{a_2}+...+c_s\overline{a_s}=0$ барабардыгын алмакпыз. $c\neq 0$ экендигин эске алсак, (3.3) төн $\overline{a}$ векторун $\{\overline{a_1},\overline{a_2},...,\overline{a_s}\}$ векторлору аркылуу туюнтууга болот □

Мисал. Төмөндөгүдөй векторлор системасын карайбыз:

$$\begin{cases}\overline{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_n),\\ \overline{b}=(0,\beta_2,\beta_3,...,\beta_n),\\ \overline{c}=(0,0,\gamma_3,...,\gamma_n),\\ ....\end{cases}$$

мында, $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k, ...$ кандайдыр бир сандар жана $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3, ...$ нөлдөн айырмалуу. Мындай векторлор системасын баскычтуу деп аташат.

5^0. Каалагандай баскычтуу векторлор системасы сызыктуу көз каранды эмес болот.

□ Карама-каршысынан далилдейли, б.а. сызыктуу көз каранды болот дейли. Анда бул векторлордун бири калгандары аркылуу сызыктуу туюнтулушу керек. Айталы $\bar{a}$ вектору $\bar{b}, \bar{c}, ...$ аркылуу сызыктуу туюнтулсун: $\bar{a} = k\bar{b} + l\bar{c} + ...$ Бирок, мындай болушу мүмкүн эмес. Себеби, $\bar{a}$ векторунун биринчи координатасы нөлдөн айырмалуу, ал эми $k\bar{b} + l\bar{c} + ...$ векторунун биринчи координатасы нөлгө барабар. Алынган карама-каршылык системанын сызыктуу көз каранды эместигин далилдейт □

4-аныктама. Эгерде $\bar{a} = k\bar{b}$ же $\bar{b} = k\bar{a}$ шарты орун алса, анда $\bar{a}$ жана $\bar{b}$ векторлору *коллинеардуу* деп аталышат.

Эгерде $\bar{a}$ жана $\bar{b}$ векторлорунун бири нөлдүк вектор болсо да, бул векторлор коллинеардуу болушат: мисалы $\bar{a} = \bar{0}$ болсо, анда $\bar{a} = 0 \cdot \bar{b}$ га ээ болобуз.

Практикалык жактан коллинеардуулук төмөнкүнү билдирет: $\bar{a}$ векторунун $a_1, a_2, ..., a_n$ координаталары менен $\bar{b}$ векторунун $b_1, b_2, ..., b_n$ координаталары *пропорционалдуу* болушу керек.

Сызыктуу көз карандылык түшүгүнүн маанисин тагыраак ачуу үчүн R^3 мейкиндигинен алынган векторлорго кайрылабыз:

1. Айталы $\bar{a}$ жана $\bar{b}$ эки векторунан турган система берилсин. Эгерде система сызыктуу көз каранды болсо, анда векторлордун бири, айталы $\bar{a}$, экинчиси аркылуу сызыктуу туюнтулат: $\bar{a} = k\bar{b}$.

Демек, эки вектордон турган система сызыктуу көз каранды болот, качан гана бул векторлор коллинеардуу болушса. Мындай жыйынтык R^3 мейкиндигинде эле эмес каалагандай R^n мейкиндигинде да орун алат.

2. Айталы R^3 мейкиндигинен алынган система $\bar{a}, \bar{b}$ жана $\bar{c}$ үч векторлорунан турсун. Бул системанын сызыктуу көз карандылыгы ал векторлордун бири, айталы $\bar{a}$, калгандары аркылуу сызыктуу туюнтула тургандыгын билдирет:

$$\bar{a} = k\bar{b} + l\bar{c} \tag{3.4}$$

Эгерде $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторлорунун баары жалпы башталышка ээ десек, анда (3.4)- теңдемеден үч вектордун тең бир тегиздикте жатаары келип чыгат.

5-аныктама. R^3 мейкиндигиндеги бир тегиздикте жатуучу же бир тегиздикке жарыш болгон $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ векторлору *компланардуу* деп аталышат.

Демек, R^3 мейкиндигиндеги үч вектор сызыктуу көз каранды болушса, анда алар компланардуу болушат жана тескерисинче, эгерде R^3 мейкиндигиндеги $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ векторлору компланардуу болушса, анда алар сызыктуу көз каранды болушат.

§4. Ортогоналдуу векторлор

Аныктама. Эгерде $\bar{a}$ жана $\bar{b}$ векторлорунун скалярдык көбөйтүндүсү нөлгө барабар, б.а. $(\bar{a},\bar{b})=0$ болсо, анда бул векторлор бири бирине *ортогоналдуу векторлор* деп аталышат.

R^3 мейкиндигинде $\bar{a}$ жана $\bar{b}$ векторлорунун ортогоналдуулугу $\bar{a}$ векторунун $\bar{b}$ векторуна перпендикулярдуулугун билдирет.

Мисал. Инфляция деңгээлин жана баа индексин аныктоонун бир жолу болуп, шаардык (же айылдык) керектөөчүлөр тарабынан алынуучу 300 түрдүү товар жана кызмат көрсөтүүлөрдөн турган "керектөөчүлөр корзинасынын" наркын табуу эсептелинет. Төмөндөгү таблицада анык бир ай үчүн мурдагы айга салыштырмалуу баа индексин эсептөөгө мисал келтирилген.

Товардын түрү	Саны	Учурдагы айдагы товардын баасы	Учурдагы айдагы чыгымдар	Мурдагы айдагы товардын баасы	Мурдагы айдагы чыгымдар
Жумуртка	3	4	12	3,5	10,5
Нан	10	7	70	6	60
Кассета	2	30	60	28	56
Жалпы чыгымдар	-	-	142	-	126,5

Баа индексин эсептөө төмөндөгүдөй жүргүзүлөт:

$\nu \approx \frac{142}{126{,}5}\cdot 100\% \approx 112{,}3\%$, демек инфляция индекси 112,3%ти түздү.

$\bar{q}(3,10,2)$ вектору аркылуу керектелүүчү товарлардын санын белгилейли, $\bar{c}(4,7,30)$ - учурдагы айдагы баалардын, $\overline{c_{\theta n}}(3{,}5{,}6{,}28)$ - өткөн айдагы баалардын векторлору болсун. Анда баа индекси төмөндөгү формула боюнча табылат:

$$p=\frac{(\bar{c},\bar{q})}{(\overline{c_{\theta m}},\bar{q})}\cdot 100\% \Rightarrow (100\bar{c},\bar{q})=p(\overline{c_{\theta m}},\bar{q}) \Rightarrow (100\bar{c}-p\overline{c_{\theta m}},\bar{q})=0.$$

Демек, баа индексин $\bar{q}$ векторун $100\bar{c} - p\overline{c_{\theta m}}$ векторуна ортогоналдуу кылуучу p сандык коэффициенти катары аныктоого болот.

Инфляция индекси төмөнкү формула боюнча табылат:

$$i = p - 100 = \frac{(\bar{c},\bar{q})}{(\overline{c_{\theta m}},\bar{q})} \cdot 100 - 100 = \frac{(\bar{c}-\overline{c_{\theta m}},\bar{q})}{(\overline{c_{\theta m}},\bar{q})} \cdot 100 .$$

§ 5. R^n мейкиндигинин базиси

R^3 мейкиндигиндеги каалагандай $\overline{p_1}$ жана $\overline{p_2}$ векторлору үчүн ал векторлордун ар бирине ортогоналдуу болгон $\bar{q}$ нөлдүк эмес вектору табылат. Бул факт төмөнкү теорема түрүндө жалпыланат.

1-теорема. Айталы R^n мейкиндигинде s сандагы вектордон турган $\overline{p_1},\overline{p_2},...,\overline{p_s}, s<n$ векторлорунун жыйындысы берилсин. Анда $\overline{p_i}$, $i=\overline{1,s}$ векторлорунун ар бирине ортогоналдуу болгон нөлдүк эмес $\bar{x}$ вектору жашайт.

Аныктама. Айталы R^n мейкиндигинен кандайдыр бир векторлор системасы алынсын. Эгерде:

1) векторлор сызыктуу көз каранды эмес болушса;

2) R^n мейкиндигинен алынган каалагандай вектор бул системадагы векторлордун сызыктуу комбинациясы болсо, анда бул векторлор системасы R^n *мейкиндигинин базиси* деп аталат.

R^n мейкиндигинин базисине мисал катары төмөндөгү n векторлор системасын алууга болот:

$$\begin{cases} \overline{e_1} &= (1,0,...,0), \\ \overline{e_2} &= (0,1,...,0), \\ ... & ... \quad ... \\ \overline{e_n} &= (0,0,...,1). \end{cases}$$

Чындыгында $\overline{e_1},\overline{e_2},...,\overline{e_n}$ векторлору баскычтуу системаны түзүшкөндүктөн алар сызыктуу көз каранды эмес болушат. Эгерде R^n мейкиндигинен каалагандай $\bar{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ векторун алсак, анда $\bar{a}=a_1\overline{e_1}+a_2\overline{e_2}+...+a_n\overline{e_n}$ барабардыгы $\bar{a}$ векторунун $\overline{e_1},\overline{e_2},...,\overline{e_n}$ векторлорунун сызыктуу комбинациясы экендигин көрсөтүп турат.

2-теорема. R^n мейкиндигинин каалагандай сызыктуу көз каранды эмес векторлор системасы базисти түзүшөт, качан гана бул системадагы векторлордун саны n ге барабар болсо.

1-мисал. $\overline{p_1}=(7;3;-2),\overline{p_2}=(0;2;1),\overline{p_3}=(0;0;4)$ векторлорунун системасы R^3 мейкиндигиндеги базисти түзүшөт. Чындыгында $\overline{p_1},\overline{p_2},\overline{p_3}$ векторлору баскычтуу системаны түзүшөт, ошондуктан сызыктуу көз каранды эмес. Ал эми алардын саны үчкө барабар болгондуктан, алар R^3 тө базисти түзүшөт.

2-мисал. $\overline{p_1}=(0;0;0;1),\ \overline{p_2}=(7;1;3;-2),\ \overline{p_3}=(0;0;-2;-6),$ $\overline{p_4}=(0;-1;2;0)$ векторлор системасы R^4 мейкиндигиндеги базисти түзүшөт. Чындыгында бул векторлорду $\overline{p_2},\overline{p_4},\overline{p_3},\overline{p_1}$ түрүндө жайгаштырсак R^4 мейкиндигинде баскычтуу системага ээ болобуз.

Демек, бул система базис болот.

§6. Мейкиндиктеги түз сызык жана тегиздиктин теңдемелери

Тегиздиктин жалпы теңдемеси. Айталы D тегиздиги $\overline{n}=(A,B,C)$ векторуна перпендикуляр болуп, $M_0(x_0,y_0,z_0)$ чекити аркылуу өтсүн (6.1-чийме).

Бул шарт менен $Oxyz$ мейкиндигинде жалгыз гана тегиздик аныкталат. Мында $\overline{n}$ вектору D тегиздигинин *нормаль вектору* деп аталат. D тегиздигиндеги каалагандай $M(x,y,z)$ чекитин алалы. Анда $\overline{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$ вектору $\overline{n}=(A,B,C)$ векторуна перпендикуляр болот. Бул векторлордун скалярдык көбөйтүндүсү нөлгө барабар болоору белгилүү, б.а. $(\overline{n},\overline{M_0M})=0$.

Алынган теңдемени координаталык формада көрсөтөбүз:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (6.1)$$

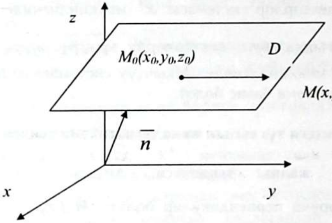
(6.1) теңдемеси $M_0(x_0,y_0,z_0)$ чекити аркылуу өтүп, $\overline{n}=(A,B,C)$ векторуна перпендикуляр болгон тегиздиктин теңдемеси болуп эсептелет. Эгерде $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$ деп алсак, анда

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (6.2)$$

түрүндө жазылган теңдеме *тегиздиктин жалпы теңдемеси* деп аталат.

Үч белгисиздүү биринчи даражадагы каалагандай теңдеме тегиздиктин теңдемеси болоорун көрсөтүүгө болот.

Эгерде $D=0$ болсо, анда $Ax+By+Cz=0$ теңдемеси координата башталышы аркылуу өткөн тегиздикти аныктайт; эгерде $A=0$ болсо, анда $By+Cz+D=0$ теңдемеси Ox огуна жарыш болгон тегиздикти аныктайт; эгерде $A=D=0$ болсо, анда $By+Cz=0$ теңдемеси Ox огу аркылуу өтүүчү тегиздикти аныктайт; эгерде $A=B=0$ болсо, анда $Cz+D=0$ теңдемеси Oxy тегиздигине жарыш болгон тегиздикти, ал эми $A=B=D=0$ болсо, $Cz=0$ же $z=0$ теңдемеси Oxy координата тегиздигин аныктайт.

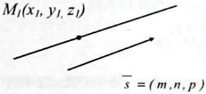


6.1-чийме

Тегиздиктердин параллелдүүлүк жана перпендикулярдуулук шарттары $\overline{n_1}=(A_1,B_1,C_1)$ жана $\overline{n_2}=(A_2,B_2,C_2)$ нормаль векторлорунун коллинеардуулук жана перпендикулярдуулук шарттары менен аныкталат.

Эки тегиздиктин параллелдүүлүк шарты болуп бул тегиздиктердин теңдемелериндеги тиешелүү өзгөрүлмөлөрдүн коэффициенттеринин пропорционалдуулугу, б.а. $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ шарты саналат. Ал эми бул тегиздиктердин перпендикулярдуулук шарты болуп, $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ шарты аткарылат.

Мейкиндиктеги түз сызык эки тегиздиктин кесилиш сызыгы катары, б.а. $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ системасын канаатандыруучу чекиттердин көптүгү катары берилиши мүмкүн.



6.2-чийме

Эгерде түз сызык *багыттоочу вектор* деп аталуучу $\overline{s} = (m,n,p)$ векторуна жарыш жана $M_1(x_1,y_1,z_1)$ чекити аркылуу өтсө (6.2-чийме), анда бул түз сызыктын теңдемеси

$$\overline{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$$

жана

$\overline{s} = (m,n,p)$ векторлорунун коллинеардуулук шартынан келип чыгат. Мында $M(x,y,z)$ түз сызыктагы каалагандай чекит.

$\dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{y - y_1}{n} = \dfrac{z - z_1}{p}$ теңдемеси *түз сызыктын мейкиндиктеги каноникалык теңдемеси* деп аталат.

Көнүгүүлөр

2.1. Эгерде $|\overline{a}| = 6$; $|\overline{b}| = 6$ жана $(\overline{a}\hat{,}\overline{b}) = \dfrac{\pi}{3}$ болсо, анда $\overline{a} \cdot \overline{b}$ ны тапкыла.

2.2. Эгерде $\overline{a} = 2p + 5q; \overline{b} = p - 3q; |\overline{p}| = 3; |\overline{q}| = 2; (\overline{p}\hat{,}\overline{q}) = \dfrac{\pi}{4}$ болсо, анда $\overline{a} \cdot \overline{b}$ ны тапкыла.

2.3. Эгерде $\overline{a} = (3;5;-2), \overline{b} = (1;-3;4), \overline{c} = (2;4;-2)$ болсо, анда төмөндөгү скалярдык көбөйтүндүлөрдү эсептегиле:
а) $(\overline{a},\overline{b})$; б) $(\overline{a},(\overline{b} + \overline{c}))$; в) $((2\overline{a} + 3\overline{b}),\overline{c})$.

2.4. Эгерде $\overline{a} = (1;1;-1;0), \overline{b} = (2;-1;2;1), \overline{c} = (-1;1;0;1)$ болсо, анда төмөндөгү векторлордун узундуктарын тапкыла:
а) $\overline{a}$; б) $3\overline{b}$; в) $\overline{a} + \overline{b}$; г) $-\overline{a} + \overline{b} + 2\overline{c}$.

2.5. Эгерде $\overline{a} = (4;1;3;-2), \overline{b} = (1;2;-2;3), \overline{c} = (10;8;1;-3)$ болсо, анда $3\overline{a} + 4\overline{b} - \overline{c}$ ны тапкыла.

2.6. $\overline{a} = (2;4;-3;0)$ жана $\overline{b} = (-1;2;2;-5)$ векторлорунун узундуктарын жана алардын арасындагы бурчту тапкыла.

2.7. Эгерде $|\overline{a}| = 2\sqrt{2}; |\overline{b}| = \sqrt{34}$ жана алардын арасындагы бурч $\varphi = 135^0$ болсо, анда $(\overline{a} - \overline{b})^2$ ны эсептегиле.

2.8. $\overline{e_1} = (-2;0;0;0), \overline{e_2} = (0;3;0;0), \overline{e_3} = (0;0;4;0), \overline{e_4} = (0;0;0;-1)$ векторлорунан турган ортогоналдуу базистеги $\overline{a} = (2;-4;3;5)$ векторунун координаталарын тапкыла.

2.9. Төмөндөгү $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ векторлору сызыктуу көз каранды болушабы?

а) $\overline{a_1} = (2;-1;3), \overline{a_2} = (1;4;-1), \overline{a_3} = (0;-9;5)$;

б) $\overline{a_1} = (1;2;0), \overline{a_2} = (3;-1;1), \overline{a_3} = (0;1;1)$.

2.10. $\overline{a_1} = (1;-1;3), \overline{a_2} = (3;-1;1), \overline{a_3} = (0;1;1)$ вектору базисти түзөөрүн көрсөткүлө.

ҮЧҮНЧҮ ГЛАВА
МАТРИЦАЛАР ЖАНА АНЫКТАГЫЧТАР

§1. Матрицалар түшүнүгү

1-аныктама. $m\times n$ өлчөмдүү матрица деп, m сапча жана n мамычадан турган сандардын тик бурчтуу таблицасын айтабыз.

Жалпы учурда $m\times n$ өлчөмдүү матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

түрүндө жазылат. Матрицаны түзүүчү сандар анын элементтери деп аталышат. Матрицалар латын алфавитинин баш тамгалары менен, мис.: $A, B, C, \dots$, ал эми элементтери $a_{ij}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$ деп белгиленишет. Мында i жана j - тиешелүү түрдө сапчанын жана мамычанын номерлери.

(1.1) матрицасын кыскача

$$A=\left\|a_{ij}\right\|, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$$

түрүндө да жазууга болот.

Айрым экономикалык көз карандылыктарды матрицалардын жардамы менен жазуу ыңгайлуу. Мисалы, ресурстардын экономиканын айрым тармактары боюнча бөлүштүрүү төмөндөгүдөй таблица менен берилсин:

Ресурстар	Экономиканын тармагы	
	өнөр жай	айыл чарба
Электр энергиясы	5,3	4,1
Эмгек ресурстары	2,5	2,3
Суу ресурстары	4,5	5,4

Бул таблицаны компакттуу формада тармактар боюнча ресурстардын бөлүштүрүлүш матрицасы түрүндө төмөнкүчө жазууга болот:

$$A_{3x2}=\begin{pmatrix} 5,3 & 4,1 \\ 2,5 & 2,3 \\ 4,5 & 5,4 \end{pmatrix}.$$

Бул матрицанын $a_{11}=5,3$ элементи өнөр жай үчүн керектелүүчү электр энергиясын, ал эми $a_{22}=2,3$ элементи айыл чарбасына керек болгон эмгек ресурстарын билдирет.

Бардык элементтери нөлгө барабар болгон матрица *нөлдүк матрица* деп аталат.

Эгерде сапчалардын саны мамычалардын санына барабар, б.а. $n = m$ болсо, анда $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ матрицасы *квадраттык матрица* деп аталат. Сапчасы менен мамычасынын номерлери барабар болгон матрицанын a_{ij} элементтерин *диагоналдык элементтер* деп аташат жана алар негизги диагоналды түзүшөт. Мисалы, жогорудагы квадраттык матрицанын негизги диагоналынын элементтери $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ болушат.

Эгерде квадраттык матрицанын бардык элементтери $a_{ij} = \begin{cases} a_{ij} \neq 0, i = j \\ a_{ij} = 0, i \neq j \end{cases}$ шартын канааттандырса, б.а. негизги диагоналындагы элементтер гана нөлдөн айырмалуу болсо, анда матрица *диагоналдык матрица* деп аталат жана ал

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

түрүндө жазылат.

Негизги диагоналындагы бардык элементтери бирге барабар болгон диагоналдык матрица *бирдик матрица* деп аталат жана аны

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

түрүндө жазабыз.

2-аныктама. Бирдей өлчөмдүү A жана B матрицаларды *барабар* деп айтышат, эгерде тиешелүү элементтери барабар, б.а. $a_{ij} = b_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ болушса жана аны $A = B$ деп белгилешет.

§2. Матрицалардын үстүнөн жүргүзүлгөн сызыктуу операциялар

1. Матрицалардын суммасы. Бирдей өлчөмдүү A жана B матрицаларынын *суммасы* деп, ар бир элементи A жана B

матрицаларынын тиешелүү элементтеринин суммасынан турган ошол эле өлчөмдөгү C матрицасын айтабыз.

Айталы $A=\|a_{ij}\|, B=\|b_{ij}\|, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$ болсун. Анда $C=A+B$ матрицасы $C=\|c_{ij}\|, c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$ түрүндө жазылат.

1-мисал. $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ жана $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

матрицаларынын суммасы аныктама боюнча $C=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

матрицасын берет.

2. Матрицаны чыныгы санга көбөйтүү. A матрицасынын α *санына болгон көбөйтүндүсү* деп, A матрицасынын ар бир элементин α чыныгы санына көбөйтүүдөн алынган $C=\alpha A$ матрицасын айтабыз.

2-мисал. $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ матрицасы жана $\alpha=-3$ саны берилсин.

Анда $C=\alpha A=-3A=\begin{pmatrix} 3 & -6 & -3 & -9 \\ -15 & -6 & 6 & -21 \end{pmatrix}$ болот.

Аныктамалардан түздөн-түз келип чыгуучу матрицаларды кошуунун жана санга көбөйтүүнүн касиеттерин санап өтөлү.

Айталы A, B жана C бирдей өлчөмдөгү матрицалар, α жана β-кандайдыр бир чыныгы сандар болушсун. Анда

1^0. $A+B=B+A$;

2^0. $(A+B)+C=A+(B+C)$;

3^0. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;

4^0. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;

5^0. $(\alpha\beta)A=(\alpha A)\beta$;

6^0. $A+O=A$, O- нөлдүк матрица;

7^0. $O\cdot A=A$.

□ 1^0. Айталы $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ жана $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$

болсо, анда $A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}=$

$$\begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} & \dots & b_{1n}+a_{1n} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} & \dots & b_{2n}+a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1}+a_{m1} & b_{m2}+a_{m2} & \dots & b_{mn}+a_{mn} \end{pmatrix}=B+A$$

Башка касиеттерин да ушул сыяктуу элс далилдөөгө болот.

3. Матрицаларды транспонирлөө. Матрицанын тартибин өзгөртпөй туруп, анын сапчаларын мамычаларына же мамычаларын сапчаларына алмаштыруу *матрицаны транспонирлөө* деп аталат.

Айталы бизге (1.1) матрицасы берилсин. Анда аныктама боюнча бул матрицага транспонирленген матрица

$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ же кыскача $A'=\|a_{ji}\|, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$ түрүндө жазылат.

3-мисал. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ жана $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ матрицаларынын транспонирленген матрицалары тиешелүү түрдө $A'=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ жана $B'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ матрицалары болушат.

Матрицаларды *транспонирлөөдө* төмөнкүдөй эки закон ченемдүүлүктүн орун алаарын байкоо кыйын эмес:

1. A матрицасын эки жолу транспонирлөөдөн келип чыккан матрица A матрицасынын өзүн берет, б.а. $A''=A$.

2. Квадраттык матрицаны транспонирлөөдө негизги диагоналда жайланышкан элементтер өз орундарын өзгөртпөйт, б.а. квадраттык матрицанын негизги диагоналы транспонирлөөдөн өзгөрбөйт.

Алгебрада жана анын колдонулуштарында симметриялуу матрицалар негизги мааниге ээ. *Симметриялуу матрицалар* деп, элементтери негизги диагоналга салыштырмалуу симметриялуу болгон, б.а. $a_{ij}=a_{ji}$ шарты орун алган квадраттык матрица аталат.

Мындай матрицаларды транспонирлөөдө эч кандай өзгөрүү болбойт. Ошондуктан

$$A = A' \tag{2.1}$$

барабардыгын симметриялуу матрицанын аныктамасы катары эсептөөгө болот.

4. Матрицаларды көбөйтүү. Матрицаларды көбөйтүү матрицалар алгебрасынын негизин түзүүчү өзгөчө амал. Мында матрицанын сапчаларын жана мамычаларын тиешелүү өлчөмдөгү сапча-вектор жана мамыча-вектор катары кароого болот.

Айталы $m \times n$ өлчөмдүү A матрицасы жана $n \times k$ өлчөмдүү B матрицасы берилсин. A матрицасын m сандагы n өлчөмдүү $\overline{a_i}$ сапча-векторлордун жыйындысы катары, ал эми B матрицасын k сандагы n өлчөмдүү $\overline{b_j}$ мамыча-векторлордун жыйындысы катары карайлы:

$$A = \begin{array}{c} \overline{a_1} \\ \overline{a_2} \\ \ldots \\ \overline{a_m} \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1m} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{array}{cccc} \overline{b_1} & \overline{b_2} & & \overline{b_k} \end{array} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nk} \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

A матрицасынын мамычаларынын саны B матрицасынын сапчаларынын санына барабар болгондуктан, бул матрицалардын көбөйтүндүсү мааниге ээ болот.

3-аныктама. A жана B *матрицаларынын көбөйтүндүсү* деп, c_{ij} элементтери A матрицасынын $\overline{a_i}$ сапча-вектору менен B матрицасынын $\overline{b_j}$ мамыча-векторунун скалярдык көбөйтүндүсүнө барабар болгон C матрицасын айтабыз.

$$C = A \cdot B = \left\| c_{ij} \right\|, c_{ij} = \left(\overline{a_i}, \overline{b_j}\right) = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,k}. \tag{2.3}$$

A жана B матрицаларынын көбөйтүндүсү болгон C матрицасы $m \times k$ өлчөмдүү болот. Бул C матрицасынын биринчи сапчасынын элементтерин алуу үчүн удаалаш түрдө A матрицасынын биринчи сапчасы менен B матрицасынын бардык мамычаларынын скалярдык көбөйтүндүсүн табуу керек. Экинчи сапчанын элементтери A нын экинчи сапчасы менен B нын бардык мамычаларынын скалярдык көбөйтүндүсүнөн алынат ж.б.

Матрицаларды көбөйтүүгө мүнөздүү болгон өзгөчөлүктү белгилей кетели: A матрицасынын мамычаларынын саны B матрицасынын сапчаларынын санына барабар болгондо гана бул эки матрицанын көбөйтүндүсүн табууга болот. Себеби, скалярдык көбөйтүндүнү табууда векторлор бирдей координаталары менен катышуусу зарыл.

Эгерде A жана B n өлчөмдүү квадраттык матрицалар болушса, анда $A \cdot B$ көбөйтүндүсүн да жана $B \cdot A$ көбөйтүндүсүн да табууга болот жана бул көбөйтүндү матрицалардын өлчөмү да n ге барабар болот. Жалпы учурда матрицаларды көбөйтүүдө орун алмаштыруу закону орун албайт, б.а. $AB \neq BA$.

4-мисал. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ жана $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ матрицалары үчүн

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$ орун алат.

Ал эми $B \cdot A$ мааниге ээ эмес, себеби B матрицасынын мамычаларынын саны A матрицасынын сапчаларынын саны менен дал келбейт.

5-мисал. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ матрицалары үчүн

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Мында AB жана BA матрицаларынын экөө тең A, B матрицаларындай эле 2×2 өлчөмгө ээ.

6-мисал. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$

Берилген B матрицасы үч сапча жана бир мамычадан турган мамыча-вектор. A, B матрицаларынын өлчөмдөрү тиешелүү түрдө 2×3 жана 3×1 ге барабар болгондуктан, AB көбөйтүндүсү жашайт.

$$AB = A\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \end{pmatrix}.$$ AB матрицасынын өлчөмү 2×1 ге барабар.

7-мисал. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ болсо, анда A^3 матрицасын тап.

$$A^3 = A^2A = (AA)A = \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 4 & 4 & 7 \\ 7 & 6 & 14 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 10 & 22 \\ 19 & 14 & 33 \\ 34 & 28 & 61 \end{pmatrix}.$$

Матрицаларды көбөйтүүнүн касиеттерин санап өтөлү.

Айталы A, B жана C бирдей өлчөмдүү матрицалар болушсун (б.а. алардын көбөйтүндүсү жашасын) жана α, β чыныгы сандары берилсин.

1^0. $(AB)C = A(BC)$;

2^0. $(A+B)C = AC + BC$;

3^0. $A(B+C) = AB + AC$;

4^0. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;

5^0. $AE = A$, E - бирдик матрица;

6^0. $EA = A^{-1}$.

Бул касиеттерди чыныгы сандардын касиеттерин пайдаланып далилдөөгө болот.

§3. Матрицалардын өздүк маанилери жана өздүк векторлору

Биз n - тартиптеги квадраттык матрицаны карайлы.

n - тартиптеги матрицаны n өлчөмдүү векторго көбөйтүүдө n өлчөмдүү вектор келип чыгат:

$$A\bar{x} = \bar{b}.$$

Аныктама. Эгерде кандайдыр бир нөл эмес $\bar{x} \in R^n$ вектору табылып,

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x} \tag{3.1}$$

шарты орун алса, анда λ саны n- тартиптеги A матрицасынын *өздүк мааниси* деп аталат. Мында, $\bar{x}$ - вектору A матрицасынын *өздүк вектору*, ал эми λ саны A матрицасынын $\bar{x}$ векторуна тиешелүү келүүчү *өздүк мааниси* деп аталат, б.а. матрицаны анын өздүк векторуна көбөйтүү, бул $|\lambda| > 1$ болгондо векторду $|\lambda|$ эсеге узартууну, ал эми $|\lambda| < 1$ болгондо векторду $|\lambda|$ эсеге кыскартууну түшүндүрөт; $|\lambda| = 1$ болгон учурда матрицаны тиешелүү өздүк векторго көбөйтүү эч нерсени өзгөртпөйт.

(3.1) теңдемесин

$$A\bar{x} - \lambda\bar{x} = \bar{0} \Rightarrow (A - \lambda E)\bar{x} = \bar{0}$$

түрүндө жазалы.

Мында E - бирдик, $\bar{0}$ - нөлдүк матрицалар. Эгерде a_{ij} - A матрицасынын элементтери болсо, анда матрицаны санга көбөйтүү жана матрицалардын суммасынын аныктамаларын пайдаланып, $A-\lambda E$ мүнөздүк матрицасын табалы:

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}.$$

Симметриялуу матрицалар үчүн бардык n өздүк маанилери чыныгы сандар болуп эсептелишет.

§4. Аныктагычтар жана алардын үстүнөн жүргүзүлүүчү амалдар. Аныктагычтардын касиеттери

1. Аныктагыч түшүнүгү. n - тартиптеги каалагандай A квадраттык матрицасына анык бир закондун негизинде кандайдыр бир сан тиешелүү коюлат. Бул сан n -тартиптеги матрицанын *аныктагычы же детерминанты* деп аталат.

Биз, экинчи жана үчүнчү тартиптеги аныктагычтардан баштайлы.

Бизге экинчи тартиптеги $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ матрицасы берилсин. Анда бул матрицанын аныктагычы

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \qquad (4.1)$$

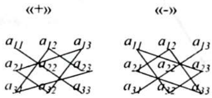
формуласы менен эсептелинет. Демек, экинчи тартиптеги аныктагычты эсептөөдө негизги диагоналындагы элементтеринин көбөйтүндүсүнөн жардамчы диагоналындагы элементтеринин көбөйтүндүсүн кемитүү жетиштүү.

Ал эми үчүнчү тартиптеги аныктагыч

$$\Delta_3=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11} \qquad (4.2)$$

формуласы боюнча эсептелинет.

Үчүнчү тартиптеги аныктагыч ар бир сапча жана ар бир мамычадан бирден гана алынган үч элементтин көбөйтүндүлөрүнүн алгебралык суммасынан турат. Мында «+» белгиси менен негизги диагоналындагы элементтер жана ал диагоналга негиздери жарыш болгон үч бурчтуктун чокуларындагы элементтердин көбөйтүндүлөрү алынат. Ал эми «-» белгиси менен жардамчы диагоналындагы элементтер жана бул диагоналга негизи жарыш болгон үч бурчтуктун чокуларындагы элементтердин көбөйтүндүлөрү алынат (4.1- чийме).



4.1-чийме

(4.2) формуласындагы ар бир кошулуучу тиешелүү матрицанын ар бир сапчасынан жана ар бир мамычасынан бирден гана элементти кармап турат.

Эми n- тартипеги квадраттык A матрицасын карайлы. Бул матрицанын n^2 сандагы бардык элементтеринин ичинен ар бир сапчадан жана ар бир мамычадан бирден гана элемент алып, n элементтен турган жыйынды тандап алабыз. Мисалы, $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ же $a_{n1}, a_{n-1,2}, ..., a_{1n}$ элементтеринин жыйыны тиешелүү түрдө негизги жана жардамчы диагоналындагы элементтерди берет.

Каалагандай мындай жыйынды биринчи 1-сапчасынын, экинчи 2-сапчасынын ж.б. элементтерин жазуу менен иреттештирүүгө болот, б.а.

$$a_{1j_1}, a_{2j_2}, ..., a_{nj_n}. \qquad (4.3)$$

$(j_1, j_2, ..., j_n)$ мамычалардын номерлери $1,2,...,n$ сандарынан турган J орун алмаштыруусун берет. n натуралдык сандардын орун алмаштырууларынын жалпы саны $n!$ га барабар.

Кичине индекс чоң индекстен кийин келе тургандай индекстердин жайгашуусун $J=(j_1, j_2, ..., j_n)$ орун алмаштыруусундагы инверция деп айтабыз. Мисалы, $J=(2;1;3)$ үч сандан турган орун алмаштыруусунда бир гана (2;1) инверциясы, ал эми $J=(3;2;1)$ орун алмаштыруусунда (3;2), (3;1), (2;1) үч инверция бар.

Орун алмаштыруудагы инверциялардын санын $Z(J)=Z(j_1, j_2, ..., j_n)$ деп белгилейбиз. Инверция саны жуп болгон орун алмаштыруу жуп деп, ал эми так болсо так орун алмаштыруу деп аталат.

1-аныктама. n-тартиптеги квадраттык A матрицасынын n-тартиптеги аныктагычы деп, ар бир сапчадан жана ар бир мамычадан бирден гана элемент алынып түзүлгөн көбөйтүндүлөрдүн $n!$ сандагы алгебралык суммасы аталат жана ал

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (4.4)$$

түрүндө жазылат. (4.3) элементтердин көбөйтүндүсү (4.4) аныктагычтын мүчөсү деп аталат жана анын (4.3) түн индекстеринен түзүлгөн орун алмаштыруулардын жуптугуна жараша болот.

2. Аныктагычтардын негизги касиеттери. Жогорудагы аныктамалардан төмөндөгүдөй касиеттер келип чыгат:

1^0. Эгерде аныктагычтын кандайдыр бир сапчасы жана мамычасы нөлдөрдөн гана турса, анда аныктагычтын мааниси нөлгө барабар.

Чындыгында *n!* кошулуучунун ар бирине нөлдүк жолчодогу жана нөлдүк мамычадагы элемент көбөйтүүчү болуп кирет.

2^0. Аныктагычтын эки сапчасынын (мамычасынын) ордун алмаштыруудан аныктагычтын белгиси гана өзгөрөт.

3^0. Бирдей эки сапчага (мамычага) ээ болгон аныктагычтын мааниси нөлгө барабар болот.

Чындыгында, бул бирдей сапчалардын (мамычалардын) ордун алмаштырсак, баштапкы эле аныктагычты алабыз. 2 - касиет боюнча $\Delta_n=-\Delta_n$ ге ээ болобуз, анда $\Delta_n=0$ болот.

4^0. Аныктагычтын каалаган сапчасындагы (мамычасындагы) жалпы көбөйтүүчүнү аныктагычтын белгисинин алдына чыгарууга болот.

5^0. Эгерде Δ_n аныктагычынын кандайдыр бир сапчасынын (мамычасынын) ар бир элементи эки кошулуучудан турса, анда бул аныктагычты эки аныктагычтын суммасы түрүндө жазууга болот.

Бул касиетти мисалда көрсөтөлү:

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a'_{21}+a''_{21} & a'_{22}+a''_{22} & a'_{23}+a''_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a''_{21} & a''_{22} & a''_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

6^0. Аныктагычтын каалаган сапчасындагы (мамычасындагы) элементтерге кандайдыр бир санга көбөйтүлгөн экинчи бир сапчанын (мамычасынын) элементерин кошуудан аныктагычтын мааниси өзгөрбөйт.

7^0. Матрицаны транспонирлөөдөн анын аныктагычы өзгөрбөйт.

Жогоруда саналган касиеттерден аныктагычтын нөлгө барабар болушу үчүн, анын жок дегенде бир сапчасынын (мамычасынын) башка сапчалардын (мамычалардын) сызыктуу комбинациясы болушу керек экендигин алабыз. Мындан аныктагычтын нөлгө барабар болушунун зарыл жана жетиштүү шарты келип чыгат: *аныктагыч нөлгө барабар болот, качан гана анын сапчалары (мамычалары) сызыктуу көз каранды болушса.*

8^0. Эгерде $C = AB$ болсо, анда $|C| = |AB| = |A| \cdot |B|$ болот.

3. Минорлор жана алгебралык толуктоочтор. n - тартиптеги (4.4) аныктагычын карайбыз. Бул аныктагычтан кандайдыр бир a_{ij} элементин тандап алып, ал элемент жайланышкан i - сапча жана j - мамычаны сызып салабыз. Келип чыккан $(n-1)$ - тартиптеги аныктагыч *a_{ij} элементинин минору* деп аталат жана M_{ij} түрүндө белгиленет.

1-мисал. $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ төртүнчү тартиптеги аныктагычынын M_{32} минорун тапкыла.

◊ a_{32} элементинин M_{32} минору үчүнчү сапча менен экинчи мамычаны сызып салуудан алынат:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & \cancel{-1} & 0 & 1 \\ 1 & \cancel{2} & 1 & -1 \\ \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{5} \\ 3 & \cancel{0} & 0 & 2 \end{vmatrix}; \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -3 \quad ◊$$

2-аныктама. (4.4) аныктагычынын *a_{ij} элементинин алгебралык толуктоочусу* деп, $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ санын айтабыз.

Жогорудагы мисал үчүн a_{32} элементинин алгебралык толуктоочусу $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5(-1) = 1$ ге барабар болот.

Минорлор жана алгебралык толуктоочтор алгебрада жана анын колдонулушунда негизги мааниге ээ. Мындай колдонулуштардын бири болуп аныктагычтарды эсептөө жөнүндөгү теорема эсептелет.

Теорема. n - тартиптеги аныктагычтын мааниси бул аныктагычтын каалагандай сапчасынын (мамычасынын) элементтерин алардын алгебралык толуктоочуларына көбөйтүп суммалаганга барабар:

$$\Delta_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}, 1 \le i \le n. \qquad (4.5)$$

(4.5) формуласы *аныктагычтын i - сапча боюнча ажыралышы* деп аталат.

Бул теорема n- тартиптеги аныктагычты эсептөөнү n сандагы $(n-1)$ тартиптеги аныктагычты эсептөөгө алып келүүгө мүмкүндүк берет.

2-мисал. $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ аныктагычын эсептегиле.

◊ (4.5) формуласы боюнча берилген аныктагычты каалаган сапчасы же мамычасы боюнча ажыратууга болот. Эсептөөгө ыңгайлуу болуш үчүн экинчи сапчасын тандап алалы:

$$\Delta_4 = 0\cdot A_{21} + 1\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot A_{23} + 2\cdot(-1)^{2+4}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -87 \quad ◊$$

§5. Тескери матрица

Ар бир $a \neq 0$ саны үчүн $a \cdot a^{-1} = 1$ орун ала тургандай a^{-1} тескери саны табылат. Квадраттык матрицалар үчүн да тескери матрица түшүнүгү жашайт.

1-аныктама. Эгерде A^{-1} матрицасын берилген матрицага оң жактан да, сол жактан да көбөйтүүдөн бирдик матрица келип чыкса, б.а.

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E \tag{5.1}$$

барабардыгы орун алса, анда A^{-1} *матрицасы* A *квадраттык матрицасынын* тескери матрицасы деп аталат.

Аныктама боюнча квадраттык матрицалар үчүн гана тескери матрица түшүнүгү жашайт деп айтууга болот. Бирок, каалагандай эле квадраттык матрицанын тескери матрицасы жашай бербейт. Эгерде a^{-1} санынын жашашы үчүн $a \neq 0$ болушу зарыл жана жетиштүү шарт болсо, анда A^{-1} матрицасынын жашашы үчүн мындай шарт болуп $|A| \neq 0$ шарты эсептелинет.

2-аныктама. Эгерде матрицанын аныктагычы нөлдөн айырмалуу, б.а $|A| \neq 0$ болсо, анда мындай матрица *кубулбаган же өзгөчөлөнбөгөн* матрица деп аталат. Тескери учурда, б.а. $|A| = 0$ болгондо *кубулган же өзгөчөлөнгөн* матрица деп аталат.

Теорема (тескери матрицанын жашашынын зарыл жана жетиштүү шарты). Жалгыз гана A^{-1} тескери матрицасынын жашашы үчүн берилген A матрицасынын кубулбаган болушу зарыл жана жетиштүү.

□ *Зарылдык шарты.* Айталы A матрицасынын A^{-1} тескери матрицасы болсун, б.а. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. Анда аныктагычтын 8^0-касиети боюнча $\left|A \cdot A^{-1}\right| = |A| \cdot \left|A^{-1}\right| = |E| = 1$, б.а. $|A| \neq 0$ жана $\left|A^{-1}\right| \neq 0$, демек A кубулбаган матрица.

Жетиштүү шарты: Айталы $|A| \neq 0$ болсун. A матрицасына транспонирленген A' матрицасынын элементтеринин алгебралык толуктоочуларынан түзүлгөн $\widetilde{A}$ матрицасын карайлы. Анда $B = \widetilde{A} \cdot A$ матрицасынын элементтери матрицаларды көбөйтүү эрежеси боюнча аныкталат:

$$b_{ij} = \sum_{s=1}^{n} \widetilde{a}_{is} \cdot a_{sj} = \sum_{s=1}^{n} A_{si} \cdot a_{sj} = \begin{cases} |A|, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}.$$

Мындан B диагоналдык матрица экендиги жана анын негизги диагоналынын элементтери болуп берилген матрицанын аныктагычы эсептелинээри келип чыгат: $B = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix}$. Ушул сыяктуу эле A матрицасынын $\widetilde{A}$ матрицасына болгон көбөйтүндүсү да B матрицасын берээрин көрсөтүүгө болот: $A \cdot \widetilde{A} = \widetilde{A} \cdot A = B$. Мындан тескери матрица катары

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \widetilde{A}, (|A| \neq 0) \tag{5.2}$$

матрицасын алсак, анда $A^{-1} \cdot A$ жана $A \cdot A^{-1}$ көбөйтүндүлөрү n-тартиптеги E бирдик матрицасына барабар болот:

$$A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = \frac{1}{|A|} \cdot B = E.$$

Тескери матрицанын жалгыздыгын далилдейли. Айталы, $X \neq A^{-1}$ жана $Y \neq A^{-1}$ орун ала тургандай дагы X, Y тескери матрицалары жашасын дейли жана $AX = E$, $YA = E$ барабардыктары орун алсын. Анда булардын биринчисин A^{-1} ге сол жактан көбөйтүп, $A^{-1}AX = A^{-1}E \Rightarrow EX = A^{-1}E \Rightarrow X = A^{-1}$ге ээ болобуз. Ошондой эле экинчисин A^{-1} ге оң жактан көбөйтсөк, $YA \cdot A^{-1} = EA^{-1} \Rightarrow YE = EA^{-1} \Rightarrow Y = A^{-1}$ келип чыгат □

Тескери матрицаны эсептөө алгоритми:

1. Берилген матрицанын аныктагычын табабыз. Эгерде $|A|=0$ болсо, анда A кубулган жана A^{-1} тескери матрицасы жашабайт. Эгерде $|A|\neq 0$ болсо, анда A кубулбаган жана тескери матрица жашайт.

2. A матрицасына транспонирленген A' матрицасын табабыз.

3.Транспонирленген $A'_{ij}=A_{ji}, i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}$ матрицасынын элементтеринин алгебралык толуктоочторун табабыз жана $\widetilde{A}:\widetilde{a}_{ij}=A'_{ij}=A_{ji}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$ матрицасын жазып алабыз.

4. (5.2) формуласы боюнча тескери матрицасын эсептейбиз.

5. Табылган тескери матрицанын тууралыгын $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$ барабардыгы аркылуу текшеребиз.

Мисал. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ матрицасынын тескери матрицасын тапкыла.

◊ 1. $|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=5\neq 0$,- демек тескери матрица жашайт.

2. $A'=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

3. A' матрицасынын элементтеринин алгебралык толуктоочторун табабыз:

$$A'_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1;\ A'_{12}=(-1)^{3}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3;\ A'_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2;$$

$$A'_{21}=(-1)^{3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-3;\ A'_{22}=(-1)^{4}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1;\ A'_{23}=(-1)^{5}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1;$$

$$A'_{31}=(-1)^{4}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1;\ A'_{32}=-2;\ A'_{33}=3.$$

$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$ матрицасын табабыз.

$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\widetilde{A}$ формуласы боюнча тескери матрицаны эсептейбиз: $A^{-1} = \dfrac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

4. $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$ барабардыгынын орун алышын текшеребиз:

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Кубулбаган матрицалар үчүн төмөндөгү касиеттер орун алат:

1^0. $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$;

2^0. $(A^{-1})^{-1} = A$;

3^0. $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$;

4^0. $(AB)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$;

5^0. $(A^{-1})' = (A')^{-1}$.

§6. Матрицанын рангы

Бир катар математикалык жана колдонмо маселелерди чечүүдө жана изилдөөдө матрицанын рангы жөнүндөгү түшүнүк негизги ролду ойнойт.

$n\times m$ өлчөмдүү A матрицасынын кандайдыр бир сапчаларын жана мамычаларын сызып салуу менен k- тартиптеги, $k \le min(m;n)$, камтылуучу квадраттык матрицаны бөлүп алууга болот. Мындай камтылуучу матрицанын аныктагычы *A матрицасынын k- тартиптеги минору* деп аталат.

Аныктама. *A матрицасынын рангы* деп, бул матрицанын нөлдөн айырмалуу болгон минорлорунун эң жогорку тартиби аталат.

A матрицасынын рангы $rangA$ же $r(A)$ деп белгиленет.

Аныктамадан төмөндөгүлөр келип чыгат: а) A матрицасынын рангы бул матрицанын өлчөмдөрүнүн кичинесинен ашып кетпейт, б.а. $r(A) \le min(m;n)$; б) $r(A)=0$ болот качан гана матрицанын бардык элементтери нөлгө барабар, б.а. $A=0$ болсо; в) n-тартиптеги квадраттык матрица үчүн $r(A)=n$ болот, качан гана A - кубулган матрица болсо.

1-мисал. $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -8 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ матрицасынын рангын эсептегиле.

◊ A матрицасы 4 - тартипте болгондуктан $r(A) \le 4$. Бирок, $|A|=0$ болот, себеби A матрицасы нөлдүк мамычаны кармап турат. Ошондуктан $r(A) \le 3$. Үчүнчү тартиптеги бардык камтылуучу матрицалар нөлдүк мамычаны кармап тургандыктан, аныктагычтары нөлгө барабар болот. Демек, $r(A) \le 2$. Экинчи тартиптеги бардык камтылуучу матрицалар же нөлдүк мамычага (экинчи же төртүнчү) же пропорционалдуу мамычага (биринчи жана үчүнчү) ээ. Ошондуктан нөлдүк аныктагычтарга ээ, демек $r(A) \le 1$. A матрицасы нөл эмес элементтерден тургандыктан, б.а. биринчи тартиптеги кубулбаган камтылуучу матрицалары болгондуктан, $r(A)=1$ ◊

2-мисал. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ матрицасынын рангын эсептегиле.

◊ $A_{3\times4}$ матрицасы үчүн $r(A) \le min(3;4)=3$. Рангы үчкө барабар экендигин текшерели. Ал үчүн үчүнчү тартиптеги бардык минорлорду, б.а. үчүнчү тартиптеги бардык камтылуучу матрицаларынын аныктагычтарын эсептейбиз:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=0, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}=0, \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}=0, \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0 .$$

Үчүнчү тартиптеги бардык минорлору нөлгө барабар болгондуктан, $r(A) \le 2$. Ал эми экинчи тартиптеги минорлордун арасында нөлдөн айырмалуусу болгондуктан, мисалы, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7 \ne 0, r(A)=2$ болот ◊

Жалпы учурда матрицанын рангын аныктоо үчүн бардык минорлорду карап чыгуу кыйынчылыктарды туудурат. Бул маселени жеңилдетүү максатында матрицанын рангына таасирин тийгизбөөчү өзгөртүп түзүүлөрдү жүргүзөбүз.

Матрицаны элементардык өзгөртүп түзүү деп, төмөндөгү амалдар аталат:

1) Нөлдүк сапчаларды (мамычаларды) алып салуу.
2) Матрицанын сапчаларынын (мамычаларынын) бардык элементтерин нөлдөн айырмалуу болгон санга көбөйтүү.
3) Матрицанын сапчаларынын (мамычаларынын) орундарын алмаштыруу.
4) Матрицанын кандайдыр бир сапчасынын (мамычасынын) элементтерине кандайдыр бир санга көбөйтүлгөн экинчи бир сапчасынын (мамычасынын) тиешелүү элементтерин кошуу.
5) Матрицаны транспонирлөө.

Бул учурда төмөнкүдөй теорема орун алат.

1-теорема. Матрицаны элементардык өзгөртүп түзүүдө анын рангы өзгөрбөйт.

□ Аныктагычтардын касиеттеринен квадраттык матрицаларды өзгөртүп түзүүдө алардын аныктагычтары өзгөрбөй тургандыгы же нөлдөн айырмалуу болгон санга көбөйтүлө тургандыгы белгилүү. Натыйжада берилген матрицанын нөлдөн айырмалуу болгон минорлорунун эң жогорку тартиби өзгөрбөйт, б. а. рангы өзгөрбөйт □

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix}, a_{ii}\neq 0, i=\overline{1,r}, r\leq k \qquad (5.3)$$

түрүндөгү матрица *баскычтуу матрица* деп аталат. Бул матрицанын нөлдөн айырмалуу болгон r-тартиптеги

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{12}\cdot\ldots\cdot a_{rr}\neq 0$$ минору жашагандыктан, бул

баскычтуу матрицанын рангы r ге барабар болот

3-мисал. $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ матрицасынын рангын

тапкыла.

◇ 1. Эгерде $a_{11}=0$ болсо, анда сапчалардын же мамычалардын ордун алмаштыруу менен $a_{11}\neq 0$ ди алууга болот. Берилген матрицанын биринчи жана экинчи сапчасынын орундарын алмаштыралы.

2. Эгерде $a_{11}\neq 0$ болсо, анда биринчи сапчанын элементтерин $-a_{21}/a_{11}=0;-a_{31}/a_{11}=2;-a_{41}/a_{11}=1$ сандарына көбөйтүп, алынган сандарды тиешелүү түрдө экинчи, үчүнчү жана төртүнчү сапчалардын тиешелүү элементтерине кошуу менен биринчи мамычанын a_{11} ден башка элементтерин нөлгө айландырабыз:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Эгерде алынган матрицада $a_{22}\neq 0$ болсо (бизде $a_{22}=-1$), анда экинчи сапчанын элементтерин $-a_{32}/a_{22}=-3;-a_{42}/a_{22}=-3$ сандарына көбөйтүп, тиешелүү түрдө үчүнчү жана төртүнчү сапчанын тиешелүү элементтерине кошуу менен экинчи мамычанын a_{12},a_{22} элементтеринен башкасын 0 го айландырабыз. Бул өзгөртүп түзүүдө 0 дөн турган сапча же мамычалар келип чыкса, анда бул сапча же мамычаларды таштап жиберебиз:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Акыркы матрица баскычтуу көрүнүштө жана нөлдөн айырмалуу экинчи тартиптеги минорду кармап турат, мисалы, $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$. Демек, алынган баскычтуу матрицанын жана берилген матрицанын рангы 2 ге барабар ◇

Матрицанын рангдары үчүн төмөнкү касиеттер орун алат:

1^0. $r(A+B)\leq r(A)+r(B)$;

2^0. $r(AB)\leq min\{r(A);r(B)\}$;

3^0. $r(A+B)\geq |r(A)-r(B)|$;

4^0. $r(A'A)=r(A)$;

5^0. Эгерде B квадраттык матрицасы жана $|B|\neq 0$ болсо, анда $r(AB)=r(A)$ болот;

6^0. $r(AB)\geq r(A)+r(B)-n$, мында n - A матрицасынын мамычаларынын, B матрицасынын сапчаларынын саны.

Матрицанын рангы түшүнүгү анын сапчаларынын же мамычаларынын сызыктуу көз карандылыгы, сызыктуу көз каранды эместиги түшүнүктөрү менен тыгыз байланышкан.

2-теорема (матрицанын рангы жөнүндөгү теорема). Матрицанын рангы анын сызыктуу көз каранды эмес сапчаларынын же мамычаларынын максималдык санына барабар болот.

Бул теорема сызыктуу теңдемелер системасын изилдөөдө негизги роль ойнойт.

§7. Матрицалардын экономикада колдонулушу

Көпчүлүк экономикалык маселелерди чыгарууда матрицаларды колдонуу негизги аныктамалардын бири болуп саналат. Бул ыкма көбүнчө берилгендердин базасын түзүүдө жана колдонууда өзгөчө мааниге ээ. Мында бардык информациялар матрицалык формада сакталат жана пайдаланылат.

Биз матрицалар жана векторлордун экономикада колдонулушуна карата бир нече маселелерди карайлы.

1-маселе. Ишкана 4 түрдүү сырьену пайдалануу менен 4 түрдүү буюм өндүрөт. Чыгымдалган сырье нормалары A матрицасынын элементтери катары берилген: *сырьенун түрү*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array} \quad \textit{буюмдун түрү}$$

Буюмдар тиешелүү түрдө 60, 50, 35 жана 40 бирдикте өндүрүлсө, анда ар бир буюмду өндүрүүгө чыгымдалган сырьелордун көлөмдөрүн тапкыла.

◊ Продукцияны өндүрүү планын түзөлү: $\bar{q} = (60;50;35;40)$. Анда коюлган маселенин чыгарылышы болуп чыгым вектору эсептелет. Бул вектордун координаталары ар бир түрдөгү сырьенун чыгымдалган чоңдугун берет жана ал $\bar{q}$ векторунун A матрицасына болгон көбөйтүндүсү катары алынат.

$$\bar{q}A = (60;50;35;40)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120+50+245+160 \\ 180+100+70+200 \\ 240+250+105+240 \\ 300+300+70+320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 575 \\ 550 \\ 835 \\ 990 \end{pmatrix}$$

Демек, буюмдарды өндүрүүгө сырьелордун тиешелүү түрдө 575, 550, 835 жана 990 бирдиги чыгымдалган ◊

2-маселе. Айталы 4 түрдүү буюм өндүрүүдөгү 4 түрдүү сырьенун чыгымдалышы 1-мисалдагы A матрицасы менен берилсин. Эгерде ар бир түрдөгү сырьенун жана аны жеткирүүнүн өздүк нарктары тиешелүү түрдө 4, 6, 5, 8 жана 2, 1, 3, 2 ш.а. бирдикке барабар болсо:

а) ар бир түрдөгү продукция үчүн сырьего жана жеткирүүгө жумшалган жалпы чыгымды;

б) берилген өндүрүү планы боюнча сырьего жана аны жеткирүүгө кетирилген жалпы чыгымды тапкыла.

◇ Сырьенун жана аны жеткирүүнүн өздүк нарктарынын матрицасын түзөбүз: $C=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Ар бир түрдөгү продукция үчүн сырьего жана аны жеткирүүгө жумшалган жалпы чыгым A матрицасынын C^T транспонирленген матрицасына болгон көбөйтүндүсү катары аныкталат:

$$A\cdot C^T=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \\ 5 & 3 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 86 & 29 \\ 89 & 31 \\ 71 & 29 \\ 140 & 47 \end{pmatrix}.$$

Демек, 1-буюмду өндүрүү үчүн сырьего 86 ш.а.б., ал эми жеткирүүгө 29 ш.а.б., 2-буюмду өндүрүү үчүн сырьего 89 ш.а.б., ал эми жеткирүүгө 31 ш.а.б. жумшалат ◇

Продукцияны өндүрүүнүн $\bar{q}=(60,50,35,40)$ планы боюнча сырьего жана аны жеткирүүгө кетирилген суммардык чыгым $\bar{q}$ векторунун AC^T матрицасына болгон көбөйтүндүсү түрүндө аныкталат:

$$\bar{q}AC^T=(60,50,35,40)\begin{pmatrix} 86 & 29 \\ 89 & 31 \\ 71 & 29 \\ 140 & 47 \end{pmatrix}=(17695,6185).$$

Демек, берилген пландагы продукцияларды өндүрүү үчүн сырьего 17695 ш.а.б., ал эми жеткирүүгө 6185 ш.а.б. жумшалат.

3-маселе. Беш ишкана 3 түрдүү сырьену пайдалануу менен 4 түрдүү продукция өндүрөт. Төмөнкү таблицада ишканалардын 1 күндүк өндүрүмдүүлүгү, жыл ичиндеги жумуш күндөрүнүн саны жана сырьелордун баалары берилген:

1) ар бир буюм боюнча ишканалардын жылдык өндүрүмдүлүктөрүн;

2) ишканалардын ар бир түрдөгү сырьего болгон жылдык керектөөлөрүн;

3) берилген сандагы жана түрдөгү продукция өндүрүүдө сырьену сатып алуу үчүн ар бир ишкананы кредиттөөнүн жылдык суммасын тапкыла.

Буюмдардын түрү	Ишкананын өндүрүмдүүлүгү					Буюмду чыгарууга чыгымдалган сырьенун түрлөрү		
	1	2	3	4	5	1	2	3
1	4	5	3	6	7	2	3	4
2	0	2	4	3	0	3	5	6
3	8	15	0	4	6	4	4	5
4	3	10	7	5	4	5	8	6
	Жыл ичиндеги жумушчу күндөрдүн саны					Сырьенун баасы		
	1	2	3	4	5	1	2	3
	200	150	170	120	140	40	50	60

◊ Өндүрүштүн бизди кызыктырган бардык экономикалык спектрин мүнөздөөчү матрицаны түзүү керек. Алгач бардык продукциянын түрү боюнча ишканалардын өндүрүмдүүлүк матрицасын келтирели: <u>*өндүрүмдүүлүк*</u>

$$
\begin{array}{cl}
\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} & \\
A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 8 & 15 & 0 & 4 & 6 \\ 3 & 10 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\end{array}
\qquad \text{буюмдун түрү}
$$

Бул матрицанын ар бир сапчасы продукциянын түрү боюнча айрым ишканалардын 1 күндүк өндүрүмдүүлүгүн берет. j – ишкананын ар бир продукциянын түрү боюнча жылдык өндүрүмдүүлүгү A матрицасынын j – мамычасын бул ишканадагы жыл ичиндеги жумушчу күндөрдүн санына көбөйткөнгө барабар болот ($j = 1,2,3,4,5$). Демек, ар бир буюмдун түрү боюнча ар бир ишкана үчүн жылдык өндүрүмдүүлүк

$$A_{жыл}=\begin{pmatrix}800 & 750 & 51 & 720 & 980\\ 0 & 300 & 680 & 360 & 0\\ 1600 & 2250 & 0 & 480 & 840\\ 600 & 1500 & 1190 & 600 & 560\end{pmatrix}$$ матрицасы менен аныкталат.

Буюмдун бирдигине сарпталган сырьенун чыгымдарынын матрицасы

$$B=\begin{array}{c} \underline{\text{буюмдун түрү}} \\ \begin{array}{cccc}1 & 2 & 3 & 4\end{array} \\ \begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 4 & 8\\ 4 & 6 & 5 & 6\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}1\\2\\3\end{array}\quad \text{сырьенун түрү}$$

түрүндө жазылат.

Ишканадагы сырьенун типтери боюнча күндөлүк чыгым B матрицасынын A матрицасына болгон көбөйтүндүсү түрүндө аныкталат:

$$BA=\begin{pmatrix}55 & 126 & 53 & 62 & 58\\ 68 & 165 & 85 & 89 & 77\\ 74 & 167 & 78 & 92 & 82\end{pmatrix}.$$

Ар бир ишкананын ар бир түрдөгү сырьего болгон жылдык керектөөсү BA матрицасынын мамычаларын тиешелүү келген жыл ичиндеги жумушчу күндөрдүн санына көбөйтүү аркылуу табылат:

$$BA_{жыл}=\begin{pmatrix}11000 & 18900 & 9010 & 7440 & 8120\\ 13600 & 24750 & 14450 & 10680 & 10780\\ 14800 & 25050 & 13260 & 11040 & 11480\end{pmatrix}.$$

Сырьелордун нарктарынын $\overline{p}=(40;50;60)$ векторун кийребиз. Анда ар бир ишкана үчүн сырьенун жалпы жылдык запасынын наркы $\overline{p}$ векторун $BA_{жыл}$ матрицасына көбөйтүү аркылуу келип чыгат:

$$\overline{P}=\overline{p}BA_{жыл}=(2008000;3496500;1878500;1494000;1552600).$$

Демек, сырье сатып алуу үчүн ишканаларды кредиттөөнүн суммасы $\overline{P}$ векторунун тиешелүү келген компоненталары аркылуу аныкталат ◇

4-маселе. Каралуучу тармак ар бири бир түрдүү продукция чыгаруучу n ишканадан турат. $i-$ ишкана чыгарган продукция көлөмүн x_i деп белгилейли. Ар бир ишкана өз өндүрүшүн камсыздоо үчүн өзү жана башка ишканалар тарабынан чыгарылган продукциянын кандайдыр бир бөлүгүн керектейт. Айталы a_{ij}-

$j-$ишкана x_j көлөмдөгү продукцияны чыгаруу үчүн керектелүүчү $i-$ ишкананын продукциясынын үлүшү болсун. Анда $i-$ ишканадагы берилген тармактан сыртка реализацияланган продукциянын саны y_i чоңдугун табуу маселеси коюлат. Бул чоңдук $y_i = x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, i=\overline{1,n}$ формуласы менен эсептелет.

Тармактын ички керектөөсүн сүрөттөөчү $n-$ тартиптеги матрицаны киргизели: $A = \|a_{ij}\|, i, j = \overline{1,n}$. Анда изделүүчү чоңдуктардын вектору $\overline{x} - A\overline{x} = \overline{y}$ матрицалык теңдемесинин чыгарылышы болуп эсептелет. Бирдик матрицаны колдонсок

$$(E - A)\overline{x} = \overline{y} \tag{7.1}$$

келип чыгат.

$n=3$ болсун. Айталы тармак чыгарган продукциялардын вектору жана ички керектөөлөрдү матрицасы тиешелүү түрдө төмөнкү көрүнүштө болсун:

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

(7.1) формуласын пайдаланып үч ишкана үчүн изделүүчү чоңдукту, тагыраак айтканда реализациялоо үчүн өндүрүлгөн продукциянын акыркы көлөмүн алабыз:

$$\overline{y} = (E - A)\overline{x} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

Демек, 1-ишкана реализациялоо үчүн 110, 2-ишкана 40 жана 3-ишкана 60 бирдик продукция өндүрөт.

Көнүгүүлөр

3.1. Эгерде $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 6 \\ 8 & 3 & 4 & 1 \\ -5 & 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ жана $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ болсо, анда $C = 2A - 3B$ матрицасын тапкыла.

3.2. Эгерде $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ жана $\alpha = 4$ болсо, анда $B = 2\alpha A$ ны тапкыла.

3.3. Матрицалардын көбөйтүндүлөрүн тапкыла:

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3.4. Амалдарды аткаргыла:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}^2$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^3$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}^4$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

3.5. Эгерде $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ жана $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ болсо, анда $AB-BA$ ны эсептегиле.

3.6. Эгерде $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ жана $f(x)=2x^2+3x$ болсо, анда $f(A)$ ны эсептегиле.

3.7. Аныктагычтарды эсептегиле:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

3.8. Матрицалардын транспонирленген матрицасын тапкыла.

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

3.9. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ матрицасынын $a_{23}; a_{14}; a_{34}$ элементтеринин минорлорун жана $a_{32}; a_{43}; a_{24}$ элементтеринин алгебралык толуктоочуларын тапкыла.

3.10. Матрицалардын рангдарын тапкыла:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 3 & 14 \\ 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 0 & 6 & -3 \\ 4 & -4 & 0 & 8 & -4 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 23 & 11 & 2 & 3 \\ 13 & 15 & 9 & 7 \\ 2 & -4 & -7 & -4 \\ 19 & 3 & -12 & -5 \end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 7 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & -1 & 7 \\ -1 & 3 & -1 & 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3.11. Матрицалардын тескери матрицаларын тапкыла:

а) $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 7 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

ТӨРТҮНЧҮ ГЛАВА
СЫЗЫКТУУ ОПЕРАТОРЛОР

§1. Сызыктуу операторлор. Негизги түшүнүктөр

Алгебра курсундагы негизги түшүнүктөрдүн бири болуп, *сызыктуу оператор* түшүнүгү эсептелет.

Биз n өлчөмдүү R^n жана m өлчөмдүү R^m сызыктуу мейкиндиктерин карайлы.

1-аныктама. Эгерде R^n мейкиндигиндеги ар бир x векторуна R^m мейкиндигинен алынган жалгыз гана y векторун тиешелүү коючу закон (эреже) берилсе, анда R^n ден R^m ге өтүүчү $\widetilde{A}(x)$ *оператору (өзгөртүп түзүүсү, чагылтуусу)* берилди деп айтабыз жана $y=\widetilde{A}(x)$ түрүндө белгилейбиз.

2-аныктама. Эгерде R^n мейкиндигинен алынган каалагандай x, y векторлору жана каалагандай λ саны үчүн

1) $\widetilde{A}(x+y)=\widetilde{A}(x)+\widetilde{A}(y)$;

2) $\widetilde{A}(\lambda x)=\lambda\widetilde{A}(x)$

барабардыктары орун алса, анда A оператору (чагылтуусу) *сызыктуу* деп аталат.

Биринчи шарт оператордун *аддитивдүүлүк* касиети, ал эми экинчи шарт оператордун *бир тектүүлүк* шарты деп аталат.

$y=\widetilde{A}(x)$ вектору x векторунун *элеси* деп, ал эми x вектору y векторунун *түспөлү (прообразы)* деп аталат.

Эгерде R^n жана R^m мейкиндиктери дал келишсе, анда A оператору R^n мейкиндигин өзүнө-өзүн чагылдырат.

R^n мейкиндигинен $e_1, e_2, \dots, e_n$ базисин тандап алып, бул базис боюнча x векторунун $x=x_1e_1+x_2e_2+\dots+x_ne_n$ ажыралышын жазып алабыз.

$\widetilde{A}$ операторунун сызыктуулугун эске алып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\widetilde{A}(x)=x_1\widetilde{A}(e_1)+x_2\widetilde{A}(e_2)+\dots+x_n\widetilde{A}(e_n). \qquad (1.1)$$

$\widetilde{A}(e_i), i=1,2,\dots,n$ вектору да R^n мейкиндигинен алынгандыктан, бул векторду да $e_1, e_2, \dots, e_n$ базиси боюнча ажыратууга болот, б.а.

$$\widetilde{A}(e_i)=a_{1i}e_1+a_{2i}e_2+\dots+a_{ni}e_n, i=\overline{1,n}. \qquad (1.2)$$

Анда

$$\widetilde{A}(x)=x_1(a_{11}e_1+a_{21}e_2+\dots+a_{n1}e_n)+x_2(a_{12}e_1+a_{22}e_2+\dots+a_{n2}e_n)+\dots+$$
$$+x_n(a_{1n}e_1+a_{2n}e_2+\dots+a_{nn}e_n)=(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n)e_1+\dots+$$
$$+(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n)e_2+\dots+(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n)e_n. \qquad (1.3)$$

Экинчиден, ошол эле $e_1, e_2, ..., e_n$ базисинде $y_1, y_2, ..., y_n$ координаталарына ээ болгон $y = \widetilde{A}(x)$ векторун төмөндөгүдөй жазууга болот:

$$\widetilde{A}(x) = y_1 e_1 + y_2 e_2 + ... + y_n e_n. \qquad (1.4)$$

Вектор берилген базис боюнча жалгыз гана ажыралмага ээ болгондуктан, (1.3) жана (1.4)түн оң жактары барабар болушат. Анда

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n \end{cases}$$

системасын алабыз.

$A = (a_{ij}),\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}$ матрицасы $\widetilde{A}$ операторунун $e_1, e_2, ..., e_n$ базисиндеги *матрицасы* деп, ал эми A матрицасынын рангы r - $\widetilde{A}$ операторунун *рангы* деп аталат.

Демек, ар бир сызыктуу операторго берилген базисте кандайдыр бир матрица тиешелүү коюлат жана тескерисинче n-тартиптеги каалагандай матрицага n - өлчөмдүү мейкиндиктеги сызыктуу оператор тиешелүү коюлат.

x вектору менен анын $y = \widetilde{A}(x)$ элесинин ортосундагы байланыш матрицалык түрдө

$$Y = AX \qquad (1.5)$$

теңдемеси менен жазылат. Мында A - сызыктуу оператордун матрицасы, ал эми $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ жана $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ дер x жана y векторлорунун координаталарынан турган мамыча-матрицалар.

Мисал. R^3 мейкиндигинин e_1, e_2, e_3 базисинде $\widetilde{A}$ сызыктуу оператору $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ матрицасы түрүндө берилсин. Анда $x = 2e_1 - 2e_2 + e_3$ векторунун $y = \widetilde{A}(x)$ элесин тапкыла.

◊ (1.5) формуласы боюнча

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$ Демек, $y = 6e_1 - 3e_2 + 3e_3$ болот ◊

§2. Сызыктуу операторлордун үстүнөн жүргүзүлүүчү амалдар

Аныктама. $\widetilde{A}$ жана $\widetilde{B}$ сызыктуу операторлорунун *суммасы* деп, $(\widetilde{A}+\widetilde{B})x=\widetilde{A}(x)+\widetilde{B}(x)$ барабардыгынан аныкталуучу $(\widetilde{A}+\widetilde{B})$ операторун айтабыз.

$\widetilde{A}$ сызыктуу *операторунун λ санына болгон көбөйтүндүсү* деп, $(\lambda\widetilde{A})x=\lambda(\widetilde{A}(x))$ барабардыгынан аныкталуучу $\lambda\widetilde{A}$ оператору аталат.

$\widetilde{A}$ жана $\widetilde{B}$ *сызыктуу операторлорунун көбөйтүндүсү* деп, $(\widetilde{A}\widetilde{B})(x)=\widetilde{A}(\widetilde{B}(x))$ барабардыгынан аныкталуучу $\widetilde{A}\widetilde{B}$ оператору аталат.

$\widetilde{A}+\widetilde{B},\ \lambda\widetilde{A},\widetilde{A}\widetilde{B}$ операторлору да жогоруда белгиленген *аддитивдүүлүк* жана *бир тектүүлүк* шарттарын канаатандырат, б.а. сызыктуу оператор болушат.

R^n мейкиндигиндеги бардык векторлорду нөлдүк векторго айландыруучу $\widetilde{O}(x)=o$ *нөлдүк* операторун жана $\widetilde{E}(x)=x$ эрежеси боюнча аракет этүүчү $\widetilde{E}$ *теңдештик* операторун аныктап алалы.

Бир эле оператордун түрдүү базистердеги матрицаларынын ортосундагы көз карандылык төмөнкүдөй теорема боюнча берилет.

Теорема. $\widetilde{A}$ сызыктуу операторунун $e_1,e_2,...,e_n$ жана $e_1^*,e_2^*,...,e_n^*$ базистериндеги A жана A^* матрицалары

$$A^*=C^{-1}AC \tag{2.1}$$

барабардыгы аркылуу байланышкан. Мында C – бул эски базистен жаңы базиске өтүү матрицасы.

□ R^n мейкиндигиндеги x векторуна $\widetilde{A}$ сызыктуу операторун колдонсок, анда x вектору ушул эле мейкиндиктеги y векторуна өтөт, б.а. эски базисте (1.5) барабардыгы, ал эми жаңы базисте

$$Y^*=A^*X \tag{2.2}$$

барабардыгы орун алат. C эски базистен жаңы базиске өтүү матрицасы болгондуктан

$$X=CX^*, \tag{2.3}$$

$$Y=CY^* \tag{2.4}$$

орун алат. (2.3) барабардыгынын сол жагынан A матрицасына көбөйтөбүз:

$$AX=ACX^*$$

жана (1.5) формула боюнча $Y=ACX^*$ келип чыгат. Бул барбардыктын сол жагын (2.4) менен алмаштырсак $CY^*=ACX^*$ же

$Y^* = C^{-1}ACX^*$. Алынган туюнтманы (2.2) формула менен салыштырсак (2.1) ге ээ болобуз □

Мисал. $\widetilde{A}$ сызыктуу оператору e_1, e_2 базисинде $A = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ матрицасы менен берилген. $e_1^* = e_1 - 2e_2, e_2^* = 2e_1 + e_2$ базисиндеги $\widetilde{A}$ операторунун матрицасын тапкыла.

◊ Мында эски базистен жаңы базиске өтүү матрицасы $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ болот. $C^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ тескери матрицасын аныктайбыз. Анда (2.1) боюнча

$$A^* = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 25 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 67 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 18/5 & -9/5 \\ -9/5 & 67/5 \end{pmatrix} \quad ◊$$

§3. Сызыктуу оператордун өздүк маанилери жана өздүк векторлору

Аныктама. Эгерде кандайдыр бир λ саны жашап,

$$\widetilde{A}(x) = \lambda x \tag{3.1}$$

барабардыгы орун алса, анда $x \neq 0$ вектору $\widetilde{A}$ сызыктуу операторунун *өздүк вектору* деп аталат. λ саны $\widetilde{A}$ операторунун x векторуна тийиштүү *өздүк мааниси* деп аталат.

Бул аныктамадан $\widetilde{A}$ сызыктуу операторунун таасири астында өздүк вектор өзүнө коллиенардуу гана болгон векторго өтө тургандыгы, б.а. кандайдыр бир санга көбөйтүлө тургандыгы көрүнүп турат.

(3.1) барабардыгын матрицалык формада төмөнкүчө жазууга болот:

$$AX = \lambda x, \tag{3.2}$$

мында X - x векторунун координаталарынан турган мамыча матрица.

(3.2) ни ачып жазалы:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \lambda x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \lambda x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = \lambda x_n. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases}$$

Матрицалык түрдө жазсак $(A - \lambda E)X = 0$ көрүнүшүндө болот.

Алынган бир тектүү система ар дайым $x=\overline{0}(0;0;...;0)$ нөлдүк чыгарылышка ээ. Нөлдүк эмес чыгарылышы жашашы үчүн системанын аныктагычы 0 гө барабар болушу зарыл жана жетиштүү, б.а.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad (3.3)$$

$(A-\lambda E)$ аныктагычы λ га слыштырмалуу n-даражадагы көп мүчө болуп эсептелет. Бул көп мүчө $\widetilde{A}$ операторунун же A матрицасынын *мүнөздүк көп мүчөсү* деп, ал эми (3.3) теңдемеси $\widetilde{A}$ операторунун же A матрицасынын *мүнөздүк теңдемеси* деп аталат.

Мисал. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ матрицасы менен берилген $\widetilde{A}$ сызыктуу операторунун өздүк маанисин жана өздүк векторун тапкыла.

◊ Мүнөздүк теңдемесин жазып алалы.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda^2-3\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda_1=5, \lambda_2=-2.$$

λ_1 жана λ_2 лер $\widetilde{A}$ операторунун өздүк маанилери $\lambda_1=5$ маанисине тиешелүү келүүчү $x^{(1)}=(x_1;x_2)$ өздүк векторун аныктайлы. Ал үчүн төмөнкү теңдемени чыгарабыз.

$$(A-\lambda_1 E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2=c; x_1=c.$$

$x^{(1)}=(c;-c)$ векторуна ээ болобуз. $c\neq 0$ нын каалагандай маанисинде $x^{(1)}$ вектору $\widetilde{A}$ сызыктуу оператору үчүн өздүк вектор болот. Ушул сыяктуу эле $\lambda_2=-2$ үчүн $x^{(2)}=(-\frac{3}{4}c;c)$ табылат ◊

§ 4. Квадраттык формалар

Түрдүү колдонмо маселелерди чыгарууда квадраттык формаларды изилдөөгө туура келет.

1-аныктама. Ар бир мүчөсү кандайдыр бир коэффициенттер менен алынган өзгөрүлмөлөрдүн биринин квадраты же түрдүү эки өзгөрүлмөнүн көбөйтүндүсү болгон сумма n өзгөрүлмөлүү *квадраттык форма* деп аталат жана кыскача

$$L(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \qquad (4.1)$$

түрүндө жазылат.

Квадраттык форманын коэффициенттери a_{ij} чыныгы сандар болушсун жана $a_{ij} = a_{ji}$ шартын канатандырсын дейли. Бул коэффициенттерден түзүлгөн $A = (a_{ij}), i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$ матрицасы *квадраттык форманын матрицасы* деп аталат.

Матрицалык түрдө квадраттык форма

$$L = X'AX \tag{4.2}$$

түрүндө жазылат. Мында $X = (x_1, x_2, ..., x_n)'$ - өзгөрүлмөлөрдүн мамыча матрицасы.

(4.1) жана (4.2) формулаларынын эквиваленттүүлүгүн көрсөтөлү:

$$L = (x_1, x_2, ..., x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, ..., x_n)\begin{pmatrix} \sum a_{1j}x_j \\ \sum a_{2j}x_j \\ ... \\ \sum a_{nj}x_j \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_1x_j + \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_2x_j + ... + \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_nx_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j.$$

1-мисал. $L = (x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 6x_1x_2 - 5x_1x_3 + 2x_2^2 - 4x_3^2$ квадраттык формасынын матрицалык жазылышын тапкыла.

◇ Изделүүчү матрицанын диагоналдык элементтери өзгөрүлмөлөрдүн квадраттарынын алдындагы коэффициенттерге барабар, б.а. *2;2;-4* ал эми калган элементтери тиешелүү коэфициенттеринин жарымына барабар. Ошондуктан

$$L = (x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -\frac{5}{2} \\ -3 & 2 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ болот } \Diamond$$

Өзгөрүлмөлөрдү кубулбаган сызыктуу өзгөртүп түзүүдө квадраттык форма кандай өзгөрө тургандыгын көрсөтөлү.

Айталы, өзгөрмөлөрдүн $X = (x_1, x_2, ..., x_n)'$ жана $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)'$ мамыча-матрицалары $X = CY$ сызыктуу тиешелүүлүгү менен байланышсын. Мында $C = (c_{ij}), i, j = \overline{1,n}$ n-тартиптеги кандайдыр бир кубулбаган матрица. Анда квадраттык форма

$$L = X'AX = (CY)'A(CY) = (Y'C')A(CY) = Y'(C'AC)Y$$

Демек, $X = CY$ кубулбаган сызыктуу өзгөртүп түзүүсүндө квадраттык форманын матрицасы

$$A^* = C'AC \tag{4.3}$$

көрүнүшүндө болот.

2-мисал. $L=(x_1,x_2)=2x_1^2+4x_1x_2-3x_2^2$ квадраттык формасынан $x_1=2y_1-3y_2, x_2=y_1+y_2$ сызыктуу өзгөртүп түзүүсүнүн жардамында алынган $L(y_1,y_2)$ квадраттык формасын тапкыла.

◇ Берилген квадраттык форманын матрицасы $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$, ал эми сызыктуу өзгөртүп түзүү матрицасы $C=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ көрүнүшүндө болот. Анда (4.3) формуласы боюнча изделүүчү квадраттык форманын матрицасы
$A^*=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & -17\\ -17 & 3\end{pmatrix}$ болот, ал эми квадраттык форма $L(y_1,y_2)=13y_1^2-34y_1y_2+3y_2^2$ түрүндө жазылат ◇

2-аныктама. $L=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ квадраттык формасында бардык коэффициенттери $i\neq j$ болгондо нөлгө барабар:

$$L=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\ldots+a_{nn}x_n^2=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2$$

жана бул квадраттык форманын матрицасы диагоналдык түрдө болсо, анда ал *каноникалык квадраттык форма* деп аталат.

1-теорема. Каалагандай квадраттык форма өзгөрмөлөрдү кубулбаган сызыктуу өзгөртүп түзүүнүн жардамында каноникалык түргө келтирилиши мүмкүн.

3-мисал. $L=(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-3x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3+x_3^2$ квадраттык формасын каноникалык түргө келтиргиле.

◇ x_1 өзгөрүлмөсү боюнча толук квадратты бөлүп алабыз:

$$L=\left(x_1^2-2x_1\cdot\frac{1}{2}\cdot(3x_2-4x_3)+\left[\frac{1}{2}(3x_2-4x_3)\right]^2\right)-\left[\frac{1}{2}(3x_2-4x_3)\right]^2+2x_2x_3+x_3^2=$$

$$=\left(x_1-\frac{3}{2}x_2+2x_3\right)^2-\frac{9}{4}x_2^2+6x_2x_3-4x_3^2+2x_2x_3+x_3^2=\left(x_1-\frac{3}{2}x_2+2x_3\right)^2-\frac{9}{4}x_2^2+$$
$$+8x_2x_3-3x_3^2.$$

Эми x_2 өзгөрүлмөсү боюнча толук квадратты бөлүп алалы:

$$L=\left(x_1-\frac{3}{2}x_2+2x_3\right)^2-\frac{9}{4}\left(x_2^2-2\cdot\frac{16}{9}x_2x_3+\left(\frac{16}{9}x_3\right)^2\right)+\frac{9}{4}\left(\frac{16}{9}x_3\right)^2-3x_3^2=$$

$$=\left(x_1-\frac{3}{2}x_2+2x_3\right)^2-\frac{9}{4}\left(x_2-\frac{16}{9}x_3\right)^2+\frac{37}{9}x_3^2.$$

Демек, $y_1 = x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3, y_2 = x_2 - \frac{16}{9}x_3, y_3 = x_3$ кубулбаган сызыктуу өзгөртүп түзүүсү берилген квадраттык форманы каноникалык түргө алып келет:

$$L = (y_1; y_2; y_3) = y_1^2 - \frac{9}{4}y_2^2 + \frac{37}{9}y_3^2 \quad \Diamond$$

Бир эле квадраттык форма түрдүүчө жолдор менен түрдүүчө каноникалык түргө келтирилгендиктен, квадраттык форманын каноникалык түрү бир маанилүү аныкталбайт. Бирок түрдүүчө жолдор менен алынган формалар жалпы касиеттерге ээ болушат. Бул касиеттердин бирин төмөндөгүдөй теорема түрүндө берилет.

2-теорема(квадраттык формалардын инерция закону). Квадраттык формадагы оң (терс) коэффициентүү кошулуучулардын саны бул форманы каноникалык түргө келтирүү жолунан көз каранды эмес.

Мисал үчүн 3-мисалдагы L квадраттык формасын $y_1 = x_1; y_2 = 2x_1 + x_2 + x_3; y_3 = \frac{7}{2}x_1 + x_2$ кубулбаган сызыктуу өзгөртүп түзүүсүн пайдалануу аркылуу $L(y_1, y_2, y_3) = \frac{37}{4}y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ түрүнө алып келүүгө болот. Мында оң жана терс коэффициенттеринин саны (тиешелүү түрдө 2 жана 1) сакталгандыгы көрүнүп турат.

Квадраттык форманын матрицасынын рангын *квадраттык форманын рангы* деп атайбыз. Квадраттык форманын рангы анын каноникалык формасындагы нөлдөн айырмалуу коэффициенттеринин санына барабар болуп, сызыктуу өзгөртүп түзүүдө өзгөрүлбөй тургандыгын белгилей кетүү керек.

3-аныктама. $L(x_1, x_2, x_3)$ квадраттык форманын өзгөрүлмөлөрүнүн жок дегенде бири нөлдөн айырмалуу болгон бардык маанилеринде $L(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$ ($L(x_1, x_2, ..., x_n) < 0$) болсо, анда квадраттык форма оң аныкталган (терс аныкталган) деп аталат.

4-мисал. $L_1 = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$ - оң аныкталган, ал эми

$L_2 = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2$ - терс аныкталган.

3-теорема. $L = X'AX$ квадраттык формасы оң (терс) аныкталган болушу үчүн A матрицасынын бардык λ_i өздүк маанилери оң (терс) болушу зарыл жана жетиштүү.

Көпчүлүк учурда квадраттык форманын оң жана терс аныкталгандыгын аныктоо үчүн *Сильвестрдин критерийин* колдонуу ыңгайлуу.

4-теорема. Квадраттык форма оң аныкталыш үчүн, бул форманын матрицасынын бардык негизги минорлору оң, б.а. $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_n > 0$ болушу зарыл жана жетиштүү, мында,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ал эми терс аныкталган квадраттык формалар үчүн негизги минорлорунун белгилери кезектешет, мында биринчи тартиптеги минорунда «-» белгиси болушу керек.

4-мисал. $L = 13x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$ квадраттык формасынын оң аныкталгандыгын көрсөткүлө.

◊ 1-жол. Квадраттык форманын матрицасы $A = \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ жана анын мүнөздүк теңдемеси $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 13-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \lambda^2 - 18\lambda + 56 = 0$ көрүнүшүндө болот. Бул теңдемени чыгарып $\lambda_1 = 14, \lambda_2 = 4$ ээ болобуз.

Мүнөздүк теңдеменин тамырлары оң болгондуктан жогоруда келтирилген теорема боюнча L квадраттык формасы оң аныкталган болот

2-жол. A матрицасынын негизги минорлору $|a_{11}| = 13, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 56$ оң болгондуктан, Сильвестрдин критерийи боюнча L квадраттык формасы оң аныкталган болот ◊

Көнүгүүлөр

4.1. Эгерде $\overline{e_1} = (1;1;1), \overline{e_2} = (1;1;2), \overline{e_3} = (1;2;3), \overline{x} = (6;9;14)$ болсо, анда $\overline{x}$ векторунун $(\overline{e_1};\overline{e_2};\overline{e_3})$ базисиндеги координаталарын тапкыла.

4.2. Эгерде $\overline{e_1} = (1;1;1;1), \overline{e_2} = (1;1;-1;-1), \overline{e_3} = (1;-1;1;-1), \overline{e_4} = (1;-1;-1;1), \overline{x} = (1;2;1;1)$ болсо, анда $\overline{x}$ векторунун $(\overline{e_1};\overline{e_2};\overline{e_3};\overline{e_4})$ базисиндеги координаталарын тапкыла.

4.3. Эгерде $\overline{e_1} = (1;0;0), \overline{e_2} = (0;1;0), \overline{e_3} = (0;0;1)$ жана $\overline{e_1}' = (1;1;1), \overline{e_2}' = (-1;2;3), \overline{e_3}' = (2;0;1)$ болсо, анда $(\overline{e_1};\overline{e_2};\overline{e_3})$

базисинен $(\overline{e_1}';\overline{e_2}';\overline{e_3}')$ базисине өтүүнүн формуласын жазгыла.

Матрица менен берилген сызыктуу оператордун өздүк маанилерин жана өздүк векторлорун тапкыла.

4.4. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

4.5. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; 4.6. $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 4.7. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

4.8. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

4.9. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ матрицасы менен берилген оператордун мүнөздүк теңдемесин жазгыла.

4.10. $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ матрицасы менен берилген оператордун мүнөздүк теңдемесин жазгыла.

БЕШИНЧИ ГЛАВА
СЫЗЫКТУУ ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫ (СТС)

Бул глава сызыктуу алгебрадагы негизги бөлүктөрдүн бири болуп саналат. Сызыктуу теңдемелер системасын колдонбогон илимдин тармактары жокко эсе. Экономикалык маселелерди чечүүдө сызыктуу теңдемелер системасы изилдөө аппараты катары кеңири колдонулат.

§ 1. Негизги түшүнүктөр

1. Теңдемелер системасынын жалпы көрүнүшү жана касиеттери. n белгисиздүү (өзгөрүлмөлүү) m сызыктуу теңдемелер системасы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.1}$$

түрүндө жазылат. Мында, $a_{ij}, b_i, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ каалагандай сандар жана тиешелүү түрдө *белгисиздердин коэффициенттери, бош мүчөлөрү* деп аталышат.

Аныктама. Теңдемелер системасынын *чыгарылышы* деп, бул системага койгондо ар бир теңдемени теңдеш барабардыкка айландыруучу $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$ сандарынын жыйындысын айтабыз.

Теңдемелер системасы жок дегенде бир чыгарылышка ээ болсо *биргелешкен*, ал эми чыгарылышы жашабаса *биргелешпеген* деп аталат. Биргелешкен теңдемелер системасы жалгыз гана бир чыгарылышка ээ болсо, система *аныкталган* деп аталат. Ал эми бирден көп сандагы чыгарылышка ээ болсо, *аныкталбаган* деп аталат.

Эгерде эки теңдемелер системасы чыгарылыштардын бирдей көптүгүнө ээ болушса, анда алар *эквиваленттүү системалар* деп аталышат. Матрицаларга колдонулуучу *элементардык өзгөртүп түзүүлөрдү* берилген системага колдонууда ага эквиваленттүү болгон система алынат.

Системаны элементардык өзгөртүп түзүүлөргө төмөнкүлөр кирет:

- $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$ түрүндөгү теңдемини сызып салуу;
- теңдемелердин же теңдемедеги $a_{ij}x_j$ кошулуучуларынын орундарын алмаштыруу;

- системанын каалагандай бир теңдемесинин эки жагына тең кандайдыр бир чыныгы санга көбөйтүлгөн экинчи бир теңдемесин кошуу;
- системадагы башка теңдемелердин сызыктуу комбинациясы болгон теңдемелерди алып салуу.

2. Теңдемелер системасынын матрицалык формасы. (1.1) теңдемелер системасындагы белгисиздердин коэффициенттеринен түзүлгөн матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

көрүнүшүндө болот. Бул матрица m сапча жана n мамычадан турат жана *системанын матрицасы* деп аталат.

Белгисиздердин X жана бош мүчөлөрдүн B мамыча – матрицаларын жазалы:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Жүргүзүлгөн белгилөөлөрдүн негизинде (1.1) теңдемелер системасын матрицалык формада

$$AX = B, \tag{1.3}$$

түрүндө жазууга болот.

Системанын A матрицасын бош мүчөлөр мамычасы менен толуктап $m\times(n+1)$ өлчөмдүү жаңы A_B матрицасын алабыз:

$$A_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

A_B матрицасы системанын *кеңейтилген матрицасы* деп аталат. Бул кеңейтилген матрица теңдемелер системасынын чыгарылышка ээ болуусунда негизги роль ойнойт.

Теорема (Кронекер-Капелли). Сызыктуу теңдемелер системасы биргелешкен болот, качан гана системанын матрицасынын рангы анын кеңейтилген матрицасынын рангына барабар болсо.

§2. Сызыктуу теңдемелер системасын чыгаруунун ыкмалары

1. Тескери матрица ыкмасы жана Крамердин теоремасы. Жогорку (1.1) теңдемесинин жекече учурун, тагыраак айтканда теңдемелердин саны белгисиздердин санына барабар, б.а. $m=n$ болгон учурун карайлы. Анда теңдемелер системасы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (2.1)$$

түрүндө жазылат.

Бул системанын n- тартиптеги A квадраттык матрицасын жазалы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

а) Тескери матрица ыкмасы. (2.1) теңдемелер системасы матрицалык формада $AX = B$ түрүндө жазылат. Мында X жана B матрицалары $n \times 1$ өлчөмдүү.

Айталы, системанын A матрицасы кубулбаган болсун, б.а. A^{-1} тескери матрицасы жашасын. $AX = B$ теңдемесинин эки жагын тең A^{-1} сол жагынан көбөйтүп, төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$X = A^{-1}B. \qquad (2.2)$$

Бул (2.1) системасынын чыгарылышынын матрицалык формасы.

A жана A^{-1} матрицаларынын тартиби болгон n саны жетишээрлик чоң болгон учурда тескери матрицаны эсептөө ыңгайсыз болот.

б) Крамер эрежеси. (2.1) теңдемелер системасын чыгаруунун экинчи бир ыкмасы Крамер теоремасына негизделген. Системанын A матрицасынын аныктагычын жазалы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Бул аныктагыч *системанын аныктагычы* деп аталат. Ал аныктагычтын j- мамычасын бош мүчөлөргө (B мамычасына) алмаштыруу менен экинчи бир Δ_j аныктагычты алабыз:

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема (Крамердин эрежеси). Айталы Δ - системанын A матрицасынын аныктагычы, ал эми Δ_j - Δ аныктагычынын j-мамычасын бош мүчөлөрдүн B мамычасы менен алмаштыруудан алынган аныктагыч болсун. Анда, эгерде $\Delta \neq 0$ болсо, (2.1) теңдемелер системасы жалгыз гана чыгарылышка ээ болот жана бул чыгарылыш төмөндөгүдөй формула менен аныкталат:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \ j = \overline{1,n} \quad . \tag{2.3}$$

(2.1) системасынын чыгарылыштарын табуу үчүн пайдаланылуучу (2.3) формулалары *Крамердин формулалары* деп аталышат.

□ Шарт боюнча $\Delta \neq 0$, б.а. $|A \neq 0|$. Демек, A матрицасы кубулбаган. Анда ага тескери матрица ар дайым жашайт жана $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$ матрицасы менен аныкталат, мында $\tilde{A}$ - A матрицасын транспонирлөөдөн келип чыккан A' матрицасынын элементтеринин алгебралык толуктоочуларынан түзүлгөн матрица.

(2.2) ни ачып жазалы:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

$|A| = \Delta$ экендигин эске алып жана матрицаларды көбөйтүп, төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \dots + b_n A_{n1} \\ b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \dots + b_n A_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \dots + b_n A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Мындан каалагандай $j = \overline{1,n}$ үчүн,

$x_j = \frac{1}{\Delta}\left(b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_n A_{nj}\right)$ деп жазууга болот. Кашаанын ичиндеги туюнтма аныктагычтын касиеттери боюнча Δ_j га барабар экендигин көрсөтүүгө болот.

Демек,

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \ \square$$

Крамердин эрежесин пайдаланууга мисал келтирели.

1-мисал. Бут кийим чыгаруучу фабрика 3 түрдүү бут кийим өндүрөт: өтүк, ботинка, кроссовка. Мында үч түрдөгү s_1, s_2, s_3 сырьелору пайдаланылат. Бир түгөй бут кийимди өндүрүүгө сарпталган сырьелордун көлөмдөрү жана 1 күндө чыгымдалган сырьенун көлөмү төмөндөгү таблицада берилген. Ар бир түрдөгү бут кийимдин 1 күндө өндүрүлгөн көлөмүн тапкыла.

Сырьенун түрү	1 түгөй.бут кийимге чыг-н сырье			1 күндө чыг-н сырье
	өтүк	кроссовка	ботинка	
s_1	5	3	4	2700
s_2	2	1	1	900
s_3	3	2	2	1600

◊ Айталы фабрика күн сайын x түгөй өтүк, y түгөй кроссовка жана z түгөй ботинка чыгарсын. Анда ар бир түрдөгү сырьенун чыгымдалышын эске алсак,

$$\begin{cases} 5x + 3y + 4z = 2700, \\ 2x + y + z = 900, \\ 3x + 2y + 2z = 1600 \end{cases}$$

системасына ээ болобуз. Бул системаны Крамердин эрежесин пайдаланып чыгаралы. Алгач $\Delta, \Delta_j, j = x, y, z,$ аныктагычтарын эсептейли:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 35 - 34 = 1, \ \Delta_x = \begin{vmatrix} 2700 & 3 & 4 \\ 900 & 1 & 1 \\ 1600 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 200, \Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 2700 & 4 \\ 2 & 900 & 1 \\ 3 & 1600 & 2 \end{vmatrix} = 300,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2700 \\ 2 & 1 & 900 \\ 3 & 2 & 1600 \end{vmatrix} = 200.$$

(2.3) формуласы боюнча

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{200}{1} = 200, y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{300}{1} = 300, z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{200}{1} = 200.$$

Демек, фабрика 1 күндө 200 түгөй өтүк, 300 түгөй кроссовка жана 200 түгөй ботинка өндүрөт ◊

2. Жалпы түрдөгү системаны чыгаруу. Айталы (1.1) түрүндөгү сызыктуу теңдемелер системасы берилсин, мында $m \le n$, б.а. белгисиздердин саны теңдемелердин санына караганда кичине болсун. Бул системаны чыгаруунун жалпы эрежесин көрсөтөлү:

1. Системанын биргелешкен болуусун аныктоо зарыл, б.а. системанын A жана кеңейтилген A_B матрицаларынын рангдарын аныктоо зарыл. Эгерде бул матрицалардын рангдары дал келбесе, анда Кронекер-Капеллинин теоремасы боюнча система биргелешпеген жана аны чыгаруу мааниге ээ эмес. Эгерде A жана A_B матрицаларынын рангдары барабар болушса, анда (1.1) – системасы биргелешкен.

Аныктама. Биргелешкен сызыктуу теңдемелер системасынын *рангы* деп, анын матрицасынын рангын айтабыз.

2. Айталы (1.1) системасы биргелешкен жана анын рангы r ге барабар болсун. Системанын (1.2) матрицасынан кандайдыр бир базистик минорду бөлүп алабыз. Айталы A жана A_B матрицаларынын алгачкы r сапчасы базистик болсун. Анда бул r сапча калган сапчалардын сызыктуу комбинациясы болуп эсептелет. Бул системадагы алгачкы r теңдемеси базистик, ал эми калган теңдемелер, булардын сызыктуу комбинациясы болот дегенди билдирет. Анда бул $(m-r)$ теңдемелерди системадан алып салууга болот. Көрсөтүлгөн элементардык өзгөртүп түзүүлөрдү жүргүзгөндөн кийин биз эквиваленттүү болгон төмөндөгү системаны алабыз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_x + \ldots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases} \qquad (2.4)$$

3. (2.4) системасынын рангы $r \le n$, б.а. ранг белгисиздердин санынан ашып кетпейт. Ошондуктан 2 учур болушу мүмкүн: $r=n$ же $r<n$. Биринчи учурда (2.4) системасы r - тартиптеги кубулбаган квадраттык матрицага ээ болот жана Крамердин эрежеси боюнча бул системанын жалгыз гана чыгарылышы жашайт, б.а. эгерде системанын рангы белгисиздердин санына барабар болсо, анда система жалгыз гана чыгарылышка ээ, б.а. система аныкталган болот.

4. Эми $r<n$ учурун карайлы (2.4) теңдемелеринин оң жагына $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ белгисиздерин кармаган бардык кошулуучуларды алып өтөлү. Анда система төмөндөгү түргө келет:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1} - \ldots - a_{rn}x_n, \end{cases} \qquad (2.5)$$

$x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ белгисиздерине каалагандай маанилерди берүүгө болот, ошондуктан алар *эркүү белгисиздер* деп аталышат.

Базистик мамычаларга тиешелүү $x_1, x_2, ..., x_r$ белгисиздери *базистик* деп аталышат. (2.5) системасынан базистик белгисиздердин эркин белгисиздер аркылуу туюнтулушун табууга болот. Эркин белгисиздер каалагандай маанини кабыл алгандыктан, биргелешкен системанын рангы белгисиздердин санынан кичине болгон учурда система чексиз көп чыгарылышка ээ болот.

3. Гаусстун ыкмасы. n өзгөрүлмөлүү m сызыктуу теңдемелердин (1.1) системасын карайбыз.

Гаусстун ыкмасы өзгөрүлмөлөрдү удаалаш жоюу ыкмасы деп да аталат. Мында берилген система элементардык өзгөртүп түзүүлөрдүн жардамында баскычтуу же үч бурчтуу көрүнүштөгү тең күчтүү системага келтирет да, андан кийин системанын акыркы сапчасынан баштап жогору карай бардык өзгөрүлмөлөрү удаалаш табылат.

Айталы (1.1) системасынын биринчи теңдемесиндеги x_1 өзгөрүлмөсүнүн коэффициенти $a_{11} \neq 0$ болсун (тескери учурда теңдемелердин ордун алмаштыруу менен жетишүүгө болот).

1-кадам. Биринчи теңдемени удаалаш $-a_{21}/a_{11}, -a_{31}/a_{11}, ..., -a_{m1}/a_{11}$ сандарына көбөйтүп жана алынган теңдемелерди тиешелүү түрдө (1.1) системанын экинчи, үчүнчү ж.б., m- чи теңдемелерине кошуп, экинчи теңдемеден баштап бардык теңдемелерден x_1 өзгөрүлмөсүн жоебуз. Жыйынтыгында

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad a_{i2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_i^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad a_{m2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)} \end{array}\right. \tag{2.6}$$

системасына ээ болобуз.

Мында жогорку (1) индекси 1-кадамдан кийин алынган жаңы коэффициенттерди билдирет.

2-кадам. $a_{22}^{(1)} \neq 0$ деп алабыз. Эгерде бул шарт орун албаса, анда теңдемелердин же мамычалардын (өзгөрүлмөлөрдүн номерлерин өзгөртүү менен) ордун алмаштыруу менен $a_{22}^{(1)} \neq 0$ шартын алууга болот.

Экинчи теңдемени удаалаш $-a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}, -a_{42}^{(1)}/a_{22}^{(1)}, \ldots, -a_{m2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ сандарына көбөйтүп жана алынган теңдемелерди тиешелүү түрдө экинчи, үчүнчү ж.б., m- чи теңдемелерге кошобуз. Алынган системанын үчүнчү теңдемесинен баштап бардык теңдемелерден x_2 өзгөрүлмөсүн жоебуз.

Ушундай эле жол менен $x_3, x_4, \ldots, x_{r-1}$ өзгөрүлмөлөрүн удаалаш жоюу процессин улантып $(r-1)$ - кадамдан кийин төмөндөгү системаны алабыз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2r}^{(1)}x_r + a_{2,r+1}^{(1)}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{rr}^{(r-1)}x_r + a_{r,r+1}^{(r-1)}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}^{(r-1)}x_n = b_r^{(r-1)}, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad 0 = b_{r+1}^{(r-1)}, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots \\ \qquad\qquad 0 = b_m^{(r-1)}. \end{cases} \qquad (2.7)$$

Акыркы $m-r$ теңдемелердеги 0 саны бул теңдемелердин сол жагы $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n$ көрүнүшүндө экендигин билдирет. Эгерде $b_{r+1}^{(r-1)}, \ldots, b_m^{(r-1)}$ сандарынын жок дегенде бири нөлдөн айырмалуу болсо, анда тиешелүү барабардык орун албайт жана (1.1) системасы биргелешпеген болот.

Демек, каалагандай биргелешкен система үчүн (2.7) системасындагы $b_{r+1}^{(r-1)}, \ldots, b_m^{(r-1)}$ сандары нөлгө барабар болушат. Бул учурда (2.7) системасынын акыркы $m-r$ теңдемеси теңдештик болуп эсептелет жана аларды (1.1) системасын чыгарууда карабай коюуга болот. Бул ашыкча теңдемелерди таштап жибергенден кийин төмөнкү 2 учур болушу мүмкүн:

а) (2.7) системасындагы теңдемелердин саны өзгөрүлмөлөрдүн санына барабар, б.а. $r=n$ болот. Бул учурда (2.7) көрүнүшүнө келет.

б) $r<n$. Бул учурда (2.7) системасы баскычтуу көрүнүштө болот.

(1.1) системасынан ага тең күчтүү болгон (2.7) системасына өтүү Гаусстун ыкмасындагы *түз жүрүш* деп, ал эми (2.7) системасынан өзгөрүлмөлөрдү табуу – *тескери жүрүш* деп аталат.

Гаусстун өзгөртүп түзүүсүн теңдемелердин өзү менен эмес, алардагы белгисиздердин коэффициенттеринин матрицасы менен жүргүзүү ыңгайлуу.

2-мисал. Гаусстун ыкмасы менен сызыктуу теңдемелер системасын чыгаргыла: $\begin{cases} x+2y+z=1, \\ 2x+3y+2z=2, \\ x-y+3z=0. \end{cases}$

◊ Бул сызыктуу теңдемелер системасына тиешелүү келген кеңейтилген матрицаны карайбыз.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$a_{11}=1\neq 0$ болгондуктан, биринчи сапчанын элементтерин -2; -1 ге көбөйтүп, тиешелүү түрдө экинчи, үчүнчү сапчаларга кошуу менен биринчи мамычанын $a_{11}=1$ ден башка элементтеринин баарын 0 го айландырабыз.

Гаусстун ыкмасынын 2 - кадамында $a_{22}=-1\neq 0$ болгондуктан, экинчи сапчаны -3 кө көбөйтүп, үчүнчү сапчага кошобуз. Ушуну менен Гаусстун ыкмасындагы түз жүрүш бүтөт. Тескери жүрүштө акыркы теңдемеден баштап белгисиздерди удаалаш табабыз.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=1, \\ -y=0, \\ 2z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=3/2, \\ y=0, \\ z=-1/2 \end{cases} \quad ◊$$

3-мисал. Гаусстун ыкмасы менен сызыктуу теңдемелер системасын чыгаргыла: $\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3+3x_4=1, \\ 2x_1-x_2+x_3-4x_4=0, \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4=2, \\ 3x_1-2x_2+x_3+5x_4=3. \end{cases}$

◊ Берилген сызыктуу теңдемелер системасына тиешелүү келген кеңейтилген матрицаны карайбыз жана Гаусс ыкмасындагы түз жүрүштү жасайбыз:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -10 & -2 \\ 0 & 7 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & -4/5 & 10 & 14/5 \\ 0 & 0 & -4/5 & 10 & 14/5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & -4/5 & 10 & 14/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

3 - кадамдан кийин алынган кеңейтилген матрицадагы нөлдүк сапча баштапкы системадагы төртүнчү теңдеме биринчи жана үчүнчү теңдемелердин суммасы болгондуктан келип чыкты. Берилген система биргелешкен жана нөлдүк сапчаны алып салгандан кийинки матрица 4 белгисиздүү 3 теңдемелер системасын берет. Мында матрицанын рангы белгисиздердин санынан кичине.

x_4 тү эрктүү белгисиз деп алсак, төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 5x_2 - 3x_3 - 10x_4 = -2, \\ -4/5x_3 + 10x_4 = 14/5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4, \\ x_2 = -\frac{5}{2} + \frac{19}{2}x_4, \\ x_3 = -\frac{7}{2} + \frac{25}{2}x_4. \end{cases}$$

x_4 өзгөрүлмөсү каалагандай маанини кабыл алгандыктан, берилген теңдемелер системасы чексиз көп чыгарылышка ээ болот ◊

§3. Гаусстун ыкмасынын жардамы аркылуу тескери матрицаны эсептөө

Гаусстун ыкмасы сызыктуу теңдемелер системасын чыгарууда универсалдуу ыкма болуп саналат. Тескери матрицаларды эсептөөдө бул ыкманын колдонулушун көрсөтөлү.

Тескери матрицаны эсептөөнүн бул эң жөнөкөй жолу төмөндөгү кадамдардан турат:

1. Берилген A матрицасынын оң жагына E бирдик матрицасы жазылат.
2. (A/E) кеңейтилген матрицасына Гаусстун ыкмасын пайдаланып, A марицасын бирдик матрицага келтиребиз.
3. Бул эсептөө процесси бүткөндөн кийин, б.а. A матрицасынын ордуна бирдик матрицаны алганыбыздан кийин, E бирдик матрицасынын ордуна A^{-1} тескери матрицасы келип чыгат, б.а. (E/A^{-1}) кеңейтилген матрицасын алабыз.

Мисал. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ матрицасынын тескери матрицасын тапкыла.

$$(A/E)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}2&1&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&1/2&1/2&0\\0&-1&1&-2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&1/2&1/2&0\\0&1&-1&2\end{array}\right)\sim$$

◊

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&-1\\0&1&-1&2\end{array}\right).$$

Демек, $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$.

Текшеребиз:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$ ◊

§4. Сызыктуу теңдемелер системасынын геометриялык интерпретациясы

Эки өзгөрүлмөлүү $Ax+By+C=0$ теңдемеси Oxy координаталык тегиздигинде түз сызыкты бере тургандыгы бизге белгилүү. Мындай эки теңдемелер системасынын чыгарылышы бир эле убакта координаталык тегиздиктеги эки түз сызыкка тең таандык болот.

Төмөндөгүдөй учурлар болушу мүмкүн:

а) эки түз сызык кесилишсе, анда система жалгыз гана чыгарылышка ээ болот;

б) түз сызыктар жарыш болушса, анда система чыгарылышка ээ эмес (биргелешпеген);

в) түз сызыктар дал келишет, б.а. системанын рангы 1 ге барабар болсо, анда система чексиз көп чыгарылышка ээ.

Үч өзгөрүлмөлүү $Ax+By+Cz+D=0$ теңдемеси үч өлчөмдүү мейкиндикте тегиздикти берет. Үч белгисиздүү үч теңдемелер системасынын чыгарылышы бир эле убакта үч тегиздикке тең таандык болгон мейкиндиктин чекиттери болот. Бул учурда төмөндөгү учурлар болушу мүмкүн:

а) үч тегиздик бир чекитте кесилишет, мында система жалгыз гана чыгарылышка ээ болот;

б) үч тегиздик бир түз сызыкта кесилишет, мында система чексиз көп чыгарылышка ээ;

в) эки тегиздик дал келет, ал эми үчүнчүсү аларды кесип өтөт, мында системанын рангы 2 ге барабар жана система чексиз көп чыгарылышка ээ болот;

г) үч тегиздик тең дал келишет, мында жалпы тегиздиктин бардык чекиттери чыгарылыш болуп эсептелишет жана системанын рангы 1 ге барабар болот;

д) тегиздиктин жок дегенде бири калган эки тегиздиктин бирине жарыш, мында система биргелешпеген;

е) тегиздиктер түгөй-түгөйү менен жарыш түз сызыктар аркылуу кесилишет, мында система биргелешпеген. Акыркы 2 учурда системанын биргелешпеген болушунун себеби, бир эле учурда үч тегиздикке тең таандык болгон үч өлчөмдүү мейкиндиктин чекиттери жок.

n белгисиздүү теңдемелер системасы берилген учурда ар бир $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - b_i = 0, i = \overline{1,m},$ түрүндөгү теңдеме A^n координаталык мейкиндигинде гипертегиздиктерди аныкташат. Мында (1.1) системасынын чыгарылышы бир эле учурда бардык m гипертегиздикке таандык болгон A^n мейкиндигиндеги чекиттердин көптүгү болот.

§5. Бир тектүү сызыктуу теңдемелер системалары

Аныктама. Эгерде системадагы бардык бош мүчөлөр нөлгө барабар болушса, анда система *бир тектүү сызыктуу теңдемелер системасы* деп аталат.

Жалпы учурда бир тектүү сызыктуу теңдемелер системасы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \qquad (5.1)$$

түрүндө жазылат.

Бир тектүү сызыктуу теңдемелер системасы ар дайым биргелешкен болот. Себеби, бул системанын жок дегенде бир $x_i = 0, i = \overline{1,n}$ чыгарылышы жашайт. Бир тектүү системанын бул чечими *нөлдүк чыгарылыш* же *тривиалдык* чыгарылыш деп аталат.

1. Бир тектүү теңдемелер системасынын чыгарылышы. Бир тектүү теңдемелер системасынын нөлдөн айырмалуу чыгарылышынын жашашы жөнүндөгү суроого төмөндөгү теорема жооп берет.

1-теорема. Бир тектүү теңдемелер системасы нөлдүк эмес чыгарылышка ээ болот, качан гана бул системанын рангы белгисиздердин санынан кичине болсо.

1-натыйжа. Эгерде бир тектүү теңдемелер системасындагы теңдемелердин саны белгисиздердин санынан кичине болсо, анда бул система нөлдүк эмес чыгарылышка ээ болот.

2-натыйжа. Эгерде бир тектүү теңдемелер системасындагы теңдемелердин саны белгисиздердин санына барабар болсо, анда бул система нөлдүк эмес чыгарылышка ээ болот, качан гана системанын матрицасынын аныктагычы 0 го барабар болсо.

2. Чыгарылыштардын фундаменталдык системасы (ЧФС). Бир тектүү теңдемелер системасынын чыгарылыштары төмөндөгүдөй касиеттерге ээ:

1^0. Эгерде $\overline{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ вектору (5.1) системасынын чыгарылышы болсо, анда каалагандай k саны үчүн $k\overline{\alpha}=(k\alpha_1,k\alpha_2,...,k\alpha_n)$ вектору да бул системанын чыгарылышы болот.

2^0. Эгерде $\overline{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n),\overline{\gamma}=(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n)$ векторлору (5.1) системасынын чыгарылыштары болсо, анда алардын $\overline{\alpha}+\overline{\gamma}$ суммасы да бул системанын чыгарылышы болот.

Демек, бир тектүү системанын чыгарылыштарынын каалагандай сызыктуу комбинациясы да бул системанын чыгарылышы болот.

n ден көп сандагы n өлчөмдүү векторлордун каалагандай системасы сызыктуу көз каранды болоорун биз билебиз. Демек, (5.1) бир тектүү теңдемелер системасынын чыгарылыштарынан турган вектордук көптүктөн базисти тандап алууга болот, б.а. берилген системанын каалагандай чыгарылышы бул базистеги векторлордун сызыктуу комбинациясы болот. Мына ушундай каалагандай базис бир тектүү сызыктуу теңдемелер системасынын *чыгарылыштарынын фундаменталдык системасы (ЧФС)* деп аталат.

2-теорема. Эгерде (5.1) бир тектүү теңдемелер системасынын рангы r белгисиздердин саны n ден кичине болсо, анда (5.1) системасынын каалагандай чыгарылыштарынын фундаменталдык системасы $n-r$ чыгарылыштан турат.

Эми чыгарылыштардын фундаменталдык системасын табуу жолун көрсөтөлү. Айталы (5.1) бир тектүү теңдемелер системасы $r<n$ рангына ээ болсун. Анда Крамердин эрежеси боюнча бул системадагы $x_1,x_2,...,x_r$ базистик белгисиздери $x_{r+1},x_{r+2},...,x_n$ эркин белгисиздери аркылуу сызыктуу туюнтулат:

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_{11}x_{r+1}+\beta_{12}x_{r+2}+\ldots+\beta_{1,n-r}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r &= \beta_{r1}x_{r+1}+\beta_{r2}x_{r+2}+\ldots+\beta_{r,n-r}x_n. \end{aligned} \tag{5.2}$$

(5.1) бир тектүү теңдемелер системасынын жекече чыгарылыштарын төмөндөгү принцип боюнча бөлүп алалы. Биринчи $\overline{x}_1$ чыгарылышын табуу үчүн $x_{r+1}=1,x_{r+2}=x_{r+3}=...=x_{=n}=0$ деп алалы. $\overline{x}_2$ чыгарылышын табуу үчүн $x_{r+2}=1$, ал эми калган $r-1$ эркин өзгөрүлмөлөрүн нөлгө барабарлайбыз. Бул процессти улантсак, вектордук формадагы чыгарылыштардын фундаменталдык системасына ээ болобуз:

$$
\begin{aligned}
&\bar{x}_1 = (\beta_{11}, \beta_{21}, \ldots, \beta_{r1}, 1, 0, \ldots, 0),\\
&\bar{x}_2 = (\beta_{12}, \beta_{22}, \ldots, \beta_{r2}, 0, 1, \ldots, 0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\bar{x}_{n-1} = (\beta_{1,n-r}, \beta_{2,n-r}, \ldots, \beta_{r,n-r}, 0, \ldots, 0, 1).
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

(5.3) чыгарылыштардын фундаменталдык системасы (5.1) бир тектүү теңдемелер системасынын чыгарылыштардын фундаменталдык жыйындарынын бири болуп саналат.

Мисал. Берилген бир тектүү сызыктуу теңдемелер системасы үчүн чыгарылыштардын фундаменталдык системасын аныктагыла:

$$
\begin{cases}
x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - 2x_6 = 0,\\
2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0,\\
-2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 0.
\end{cases}
$$

◊ Бул системаны Гаусстун ыкмасы менен чыгарабыз.

Системада теңдемелердин саны белгисиздердин санынан кичине болгондуктан x_1, x_2, x_3 тү базистик белгисиздер, ал эми x_4, x_5, x_6 ны эркин белгисиздер деп эсептейли.

Системанын кеңейтилген матрицасын түзүп алып, Гаусстун ыкмасындагы түз жүрүштү жасайбыз:

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & -1 & 1 & x_4 & -x_5 & +2x_6\\
2 & -3 & -2 & -x_4 & +x_5 & \\
-2 & 3 & 3 & -x_4 & -x_5 & +x_6
\end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & -1 & 1 & x_4 - x_5 + 2x_6\\
0 & -1 & -4 & -3x_4 + 3x_5 - 4x_6\\
0 & 1 & 5 & x_4 - 3x_5 + 5x_6
\end{array}\right) \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|c}
1 & -1 & 1 & x_4 - x_5 + 2x_6\\
0 & -1 & -4 & -3x_4 + 3x_5 - 4x_6\\
0 & 0 & 1 & -2x_4 + x_6
\end{array}\right).
$$

Бул өзгөртүп түзүүлөрдөн алынган кеңейтилген матрица, берилген системага эквиваленттүү болгон төмөнкү теңдемелер системасын берет:

$$
\begin{cases}
x_1 - x_2 + x_3 = x_4 - x_5 + 2x_6,\\
-x_2 - 4x_3 = -3x_4 + 3x_5 - 4x_6,\\
x_3 = -2x_4 + x_6.
\end{cases}
$$

Гаусстун ыкмасындагы тескери жүрүштү жасасак, базистик белгисиздердин эркүү белгисиздер аркылуу туюнтулушун алабыз:

$$x_3 = -2x_4 + x_6, x_2 = 11x_4 - 3x_5, x_1 = 14x_4 - 4x_5 + x_6.$$

Берилген бир тектүү системасынын рангы 3 кө барабар болгондуктан, бул система үчүн чыгарылыштардын фундаменталдык системасы үч сызыктуу көз каранды эмес векторлордон турат. (5.3) формуласы боюнча $n = 6, r = 3$ болгон учурда, эркин белгисиздер үчүн $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ сандарын алсак, чыгарылыштардын

$$\overline{x}_1 = (14;11;-2;1;0;0),$$
$$\overline{x}_2 = (-4;-3;0;0;1;0;),$$
$$\overline{x}_3 = (1;0;1;0;0;1),$$

фундаменталдык жыйындысын алабыз ◊

§6. Сызыктуу теңдемелер системасынын экономикада колдонулушу

Сызыктуу теңдемелер системасын түзүүгө жана чыгарууга келтирилүүчү экономикалык маселелерди карайлы.

1. Сырьенун запастары боюнча продукцияны өндүрүүнүн прогнозу. Ишкана 3 түрдүү сырье пайдаланып, 3 түрдүү продукция өндүрөт. Сырьелордун продукциялар боюнча сарпталышы жана запастары төмөнкү таблицада берилген. Сырьелордун берилген запастарында продукциянын ар бир түрүн өндүрүүнүн көлөмдөрүн табуу талап кылынат.

Сырьенун түрү	Продукция түрү боюнча сырьенун чыгымдалышы			Сырьенун запасы
	1	2	3	
1	6	4	5	2400
2	4	3	1	1450
3	5	2	3	1550

◊ Өндүрүлгөн продукциянын көлөмдөрүн x_1, x_2 жана x_3 аркылуу белгилейли. Анда ар бир түрдөгү сырье үчүн запастардын толук чыгымдалыш шартын баланстык катыш түрдө төмөнкүчө жазууга болот:

$$\begin{cases} 6x_3 + 4x_2 + 5x_3 = 2400, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 1450, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1550. \end{cases}$$

Бул системаны чыгарып, ар бир түрдөгү продукциянын көлөмдөрүн аныктайбыз: $x_1 = 150, x_2 = 250, x_3 = 100$ ◊

2. Продукцияны өндүрүүнү прогноздоо маселенин жалпы коюлушу. Айталы $C = \left|c_{ij}\right|, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ - n түрдөгү продукцияны өндүрүүдөгү m түрдүү сырьенун чыгымдалуу матрицасы болсун. Анда сырьелордун запастарынын көлөмдөрүнүн $\overline{q} = (q_1, q_2, ..., q_n)$ вектору белгилүү болгон учурда продукцияларды өндүрүүнүн пландарынын $\overline{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ вектору $C\overline{x}^T=\overline{q}^T$ n белгисиздүү m теңдемелер системасынын чыгарылыштары аркылуу аныкталат. Мында, T индекси сапча-векторду мамыча-векторго транспонирлөөнү билдирет.

§7. Көп тармактуу экономикадагы Леонтьевдин модели

Көп тармактуу чарбадагы макроэкономика түрдүү тармактардын ортосундагы балансты талап кылат. Ар бир тармак бир жагынан өндүрүүчү болуп, экинчи жагынан башка тармактар чыгарган продукцияларды керектөөчү болуп саналат. Продукцияны өндүрүү жана продукцияга болгон керектөөнүн ортосундагы байланышты эсептөө маселеси келип чыгат. Бул маселе биринчи жолу белгилүү америкалык окумуштуу В.В. Леонтьев тарабынын 1936-жылы математикалык модель түрүндө формулировкаланган. Бул модель матрицалар алгебрасына негизделип, анда матрицалык анализ аппараты колдонулат.

1. Балanстык тиешелештиктер.

Жөнөкөйлүк үчүн чарбанын өндүрүмдүүлүк чөйрөсүнүн ар бири кандайдыр бир тектүү продуктаны өндүрүүчү n тармактан турсун. Ар бир тармак өз өндүрүшүн камсыздоо үчүн башка тармактар өндүргөн продукцияны керектейт(өндүрүштүк керектөө). Адатта өндүрүш процесси кандайдыр бир убакыт аралыгында каралат жана көпчүлүк учурларда мындай бирдик болуп жыл эсептелинет.

Төмөндөгүдөй белгилөөлөрдү кийрели:

- x_i - i - тармактагы продукциянын жалпы көлөмү;
- x_{ij} - j - тармакта x_j көлөмдөгү продукцияны өндүрүүдө керектелген i - тармактын продукциясынын көлөмү;
- y_i - i - тармактын реализациялоого багытталган продукциясынын көлөмү же акыркы керектөө продуктасы. Бул керектөөгө граждандардын өздүк керектөөлөрү, коомдук керектөөлөрдү канааттандыруу, мамлекеттик институттарды каржылоо ж.б. кирет.

Өнөр жайдын түрдүү тармактарын байланыштырган балансык принцип төмөндөгүдөй: i - тармактагы өндүрүлгөн продукциянын жалпы көлөмү өндүрүштүк жана өндүрүштүк эмес чөйрөлөрдөгү керектөөлөрдүн көлөмдөрүнүн суммасына барабар болушу керек. Балансык тиешелүүлүктөрдүн эң жөнөкөй түрү төмөндөгүдөй көрүнүштө болот:

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + y_i, i=\overline{1,n}. \qquad (7.1)$$

(7.1) теңдемелери *балансык тиешелүүлүктөр* деп аталышат.

Түрдүү тармактардагы продукциялар түрдүү өлчөм бирдиктерине ээ болгондуктан, мындан ары парктык балансты карайбыз.

2. Көп тармактуу экономиканын сызыктуу модели.

В.В. Леонтьев АКШнын экономикасын анализдөөнүн негизинде төмөндөгүдөй маанилүү фактыны аныктаган: узак убакыт аралыгында $a_{ij} = x_{ij} / x_j$ чоңдуктары өтө жай өзгөргөндүктөн, аны туруктуу сан катары кароого болот. Бул жетишээрлик узак убакытта өндүрүш технологиясы бир эле деңгээлде болот жана j-тармактын x_j көлөмүндөгү продукциясын өндүрүүдө i - тармактын продукциясын керектөөнүн көлөмү *технологиялык туруктуу* дегенди түшүндүрөт.

Бул фактынын негизинде төмөндөгүгө жол коюуга болот: j - тармак x_j - көлөмүндөгү продукцияны өндүрүү үчүн i - тармактын $a_{ij}x_j$ көлөмүндөгү продукциясын колдонуусу керек, a_{ij} − туруктуу сандар. Мындай өндүрүш технологиясы *сызыктуу* деп эсептелинет, ал эми бул жол коюунун өзү *сызыктуулук гипотезасы* деп аталат. Мында a_{ij} сандары *түз чыгым коэффициенттери* деп аталат.

Сызыктуулук гипотезасына ылайык

$$x_{ij} = a_{ij}x_j, i, j = \overline{1,n} \tag{7.2}$$

барабардыгына ээ болобуз.

Анда (7.1) теңдемесин төмөндөгүдөй теңдемелер системасы түрүндө жазууга болот:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1, \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + y_n. \end{cases} \tag{7.3}$$

Өндүрүлгөн продукциянын көлөмдөрүнөн турган мамыча - векторду, акыркы керектөөлөрдүн векторун жана түз чыгымдар коэффициенттеринин матрицасын кийрели:

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \overline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{7.4}$$

Анда (7.3) теңдемелер системасы матрицалык формада

$$\overline{x} = A\overline{x} + \overline{y} \tag{7.5}$$

көрүнүшүндө болот. (7.5) көп учурда *тармактар аралык сызыктуу баланс* теңдемеси деп аталат. (7.5) теңдемеси (7.4) матрицалык көрсөтүлүшү менен бирдикте *Леонтьевдин модели* деп аталат.

3. Леонтьевдин продуктивтүү моделдери. Эгерде компоненттери терс эмес болгон каалагандай $\bar{y}$ вектору үчүн (7.5) теңдемесинин чечими болгон бардык элементтери терс эмес $\bar{x}$ вектору жашаса, анда бардык элементтери терс эмес болгон A *матрицасы продуктивтүү* деп аталат. Бул учурда Леонтьевдин модели да *продуктивтүү* деп аталат.

(7.5) теңдемесинин чыгарылыштары жана анын өзгөчөлүктөрүн изилдөөчү математикалык теория иштелип чыгарылган. Анын айрым бир негизги моменттерин көрсөтөлү.

Теорема. Эгерде терс эмес элементтүү A матрицасы жана терс эмес компоненттүү кандайдыр бир $\bar{y}$ вектору үчүн (7.5) теңдемеси компоненттери терс эмес болгон $\bar{x}$ чечимине ээ болсо, анда A матрицасы продуктивтүү болот.

Ошентип, A матрицасы продуктивтүү болушу үчүн жок дегенде бир $\bar{y}$ оң вектору үчүн (7.5) теңдемесинин оң чыгарылыштары бар экендигин көрсөтүү жетиштүү болот. (7.5) системасын E бирдик матрицасын колдонуу менен жазалы

$$(E - A)\bar{x} = \bar{y}. \tag{7.6}$$

Эгерде $(E - A)^{-1}$ тескери матрицасы жашаса, анда (7.6) теңдемесинин да жалгыз чыгарылышы жашайт жана

$$\bar{x} = (E - A)^{-1}\bar{y} \tag{7.7}$$

түрүндө жазылат. Мында $(E - A)^{-1}$ матрицасы *толук чыгымдар матрицасы* деп аталат.

A матрицасынын продуктивтүү болушунун бир нече критерийлери бар. Алардын ичинен экөөнө токтолобуз.

Продуктивтүүлүктүн 1-критерийи. A матрицасы продуктивтүү болот, качан гана $(E - A)^{-1}$ матрицасы жашап жана анын элементтери терс эмес болсо.

Продуктивтүүлүктүн 2-критерийи. Терс эмес элементтүү A матрицасы продуктивтүү болот, эгерде бул матрицанын каалагандай сапча же мамыча боюнча элементтеринин суммасы 1 ден ашып кетпесе, б.а. $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \le 1$ жана жок дегенде бир сапча же мамыча үчүн бул сумма бирден накта кичине болсо.

Леонтьевдин моделинин колдонулуштарынын мисалдарда карайлы.

1-мисал. Төмөндөгү таблицада кандайдыр бир убакыт аралыгында, өнөр жайдын 5 тармагынын баланс боюнча маалыматтары берилген. Акыркы керектөөлөрдүн жана өндүрүлгөн продукциянын жалпы көлөмдөрүнүн векторлорун, түз чыгымдар коэффициенттеринен түзүлгөн матрицаны тапкыла жана бул матрицанын продуктивдүү болоорун аныктагыла.

№	Тармак	Керектөө					Акыркы прод. көлөмү	Чыг. прод. жалпы көлөмү
		1	2	3	4	5		
1	Станок жасоо	15	12	24	23	16	10	100
2	Энергетика	10	3	35	15	7	30	100
3	Машина куруу	10	5	10	10	10	5	50
4	Автомобилдик өнөр жай	10	5	10	5	5	15	50
5	Углеводдорду алуу жана иштеп чыгуу	7	15	15	10	3	50	100

◊ Таблицада балансты түзүүчүлөр берилген. x_{ij} - биринчи 5 мамыча; y_i - алтынчы мамыча; x_i - акыркы мамыча, $i,j=\overline{1,5}$. (7.2) жана (7.3) формулалары боюнча төмөндөгүлөргө ээ болобуз:

$$\bar{x}=\begin{pmatrix}100\\100\\50\\50\\100\end{pmatrix},\bar{y}=\begin{pmatrix}10\\30\\5\\15\\50\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}0,15&0,12&0,48&0,46&0,16\\0,10&0,03&0,70&0,30&0,07\\0,10&0,05&0,10&0,20&0,10\\0,10&0,05&0,10&0,10&0,05\\0,07&0,15&0,30&0,20&0,03\end{pmatrix}.$$

A матрицасынын бардык элементтери терс эмес, бирок бул матрицанын үчүнчү жана төртүнчү мамычаларынын суммасы 1 ден чоң. Продуктивдүүлүктүн 2- критерийи орун алган жок. Демек, A матрицасы продуктивдүү болбойт. Продуктивдүү эместиктин экономикалык себеби төмөндөгүдөй: үчүнчү жана төртүнчү тармактагы ички керектөө алардын чыгарган продукциясынын жалпы көлөмүнө салыштырмалуу өтө чоң ◊

2-мисал. Төмөндөгү таблицада, кандайдыр бир убакыт аралыгындагы 3 өнөр жай тармагынын баланс боюнча маалыматтары берилген. Эгерде тармактар боюнча акыркы керектөө тиешелүү түрдө 60,70 жана 30 акчалай бирдикке өссө, анда ар бир түрдөгү өндүрүлгөн продукциянын жалпы көлөмүн тапкыла.

№	*Тармак*	Керектөө			Акыркы прод. көлөмү	Чыг. прод. жалпы көлөмү
1	Углеродду алуу жана иштетүү	5	35	20	40	100
2	Энергетика	10	10	20	60	100
3	Машина куруу	20	10	10	10	50

◊ Чыгарылган продукциянын жалпы көлөмдөрүнүн жана акыркы керектөөлөрдүн векторлорун, түз чыгымдардын коэффициенттеринин матрицасын жазалы. (7.2) жана 7.3) формулалары боюнча

$$\bar{x}=\begin{pmatrix}100\\100\\150\end{pmatrix},\bar{y}=\begin{pmatrix}40\\60\\10\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}0{,}05 & 0{,}35 & 0{,}40\\0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}40\\0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}20\end{pmatrix}$$ га ээ болобуз.

A матрицасы продуктивтүүлүктүн 2 критерийин тең канаатандырат. Акыркы керектөө векторун чоңойтууда жаңы алынган акыркы продукт вектору

$$\bar{y}_*=\begin{pmatrix}60\\70\\30\end{pmatrix} \tag{7.8}$$

көрүнүшүндө болот. A матрицасы өзгөрбөгөн учурда өндүрүлгөн продукциянын жалпы көлөмүн аныктаган жаңы $\bar{x}_*$ векторун табуу талап кылынат. Бул учурда $\bar{x}_*$ белгисиз векторунун x_1, x_2, x_3 компоненттери (7.3) системасы боюнча төмөндөгү теңдемелер системасынан табылат:

$$\begin{cases}x_1=0{,}05x_1+0{,}35x_2+0{,}4x_3+60,\\x_2=0{,}1x_1+0{,}1x_{12}+0{,}4x_3+70,\\x_3=0{,}2x_1+0{,}1x_2+0{,}2x_3+30.\end{cases}$$

Бул системаны матрицалык формада жазсак:

$$\bar{x}_*=A\bar{x}_*+\bar{y}_*\ , \tag{7.9}$$

$$(E-A)\bar{x}_*=\bar{y}_* \tag{7.10}$$

барабардыктарына ээ болобуз. Мында $(E-A)$ матрицасы

$$E-A=\begin{pmatrix}0{,}95 & -0{,}35 & -0{,}40\\-0{,}10 & 0{,}90 & -0{,}40\\-0{,}20 & -0{,}10 & 0{,}80\end{pmatrix}$$ көрүнүшүндө болот.

(7.8) вектору берилген учурда, (7.10) сызыктуу теңдемелер системасынын чыгарылышы $\bar{x}_*$ жаңы векторун берет жана ал вектор

(7.9) балапстык теңдемелер системасынын чыгарылышы болуп эсептелет:

$$\bar{x}_* = \begin{pmatrix} 152,6 \\ 135,8 \\ 92,5 \end{pmatrix}.$$

Ошентип, акыркы продукт векторунун компоненттерин чоңойтуу үчүн продукциялардын жалпы көлөмдөрүн төмөндөгүдөй көбөйтүү зарыл: углеводдорду алуу жана иштетүүнү берилген баштапкы чоңдугуна салыштырмалуу 52,6%, энергетика деңгээлин 35,8% жана машина курууну 85% ◊

§8. Соода жүргүзүүнүн сызыктуу модели

Матрицанын өздүк вектору жана өздүк мааниси түшүнүгүнө келүүчү экономикалык процесстердин бири болуп, товарларды өз ара сатып алуу процесси эсептелинет. Айталы n өлкөнүн тиешелүү түрдө $x_1, x_2, ..., x_n$ бюджеттери, товарларды сатып алууга жумшалсын. Биз алмаштыруунун сызыктуу моделин же эл аралык соода моделин карайбыз.

Айталы $a_{ij} -$ i $-$ өлкөнүн товарларын сатып алууга жумшаган $j-$ өлкөнүн x_j- бюджетинин үлүшү болсун. a_{ij} коэффициенттеринин матрицасын түзөбүз:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{8.1}$$

Эгерде бардык бюджет, товарларды өлкөнүн өзүнөн жана сырттан сатып алууга гана чыгымдалса, анда

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \tag{8.2}$$

барабардыгы орун алат.

(8.2) шартын канаатандырган, б.а. каалагандай мамычасынын элементтеринин суммасы 1 ге барабар болгон, (8.1) матрицасы *соода жүргүзүүнүн структуралык матрицасы* деп аталат. i $-$ өлкө үчүн ички жана сырткы соодадан түшкөн киреше

$$P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$$

формуласы аркылуу туюнтулат.

Дефицитсиз соода шарты табигый түрдө төмөндөгүчө түшүндүрүлөт: ар бир өлкөнүн бюджети соодадан түшкөн кирешеден ашып кетпеш керек, б.а. $P_i \geq x_i$ же

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq x_i, i = \overline{1,n}. \qquad (8.3)$$

(8.3) шартында барабарсыздык белгисинин болбой тургандыгын далилдейбиз. Бул барабарсыздыктардын баарын i боюнча 1 ден n ге чейин суммалайбыз. x_j бюджет чоңдугу боюнча кошулуучуларды топтоштуруп

$$x_1(a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{n1}) + x_2(a_{12} + a_{22} + \ldots + a_{n2}) + \ldots + x_n(a_{1n} + a_{2n} + \ldots +$$
$$+ a_{nn}) \geq x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$

ээ болобуз.

Алынган барабарсыздыктын сол жагындагы кашаалардын ар бири (8.2) шарты боюнча бирге барабар болот. Демек, биз $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ барабарсыздыгына ээ болдук. Мында барабардык белгиси гана орун алышы мүмкүн.

Демек, (8.3) шарты барабардык белгисинде жазылат:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = x_n. \end{cases} \qquad (8.4)$$

Ар бир компонентти тиешелүү өлкөнүн бюджетин мүнөздөөчү $\bar{x}$ бюджет векторун кийребиз. Анда (8.4) системасын төмөнкүчө матрицалык формада жазууга болот:

$$A\bar{x} = \bar{x}. \qquad (8.5)$$

(8.5) - A структуралык матрицасынын $\lambda = 1$ маанисине тиешелүү өздүк вектору дефицитсиз эл аралык соода жүргүзүүчү өлкөлөрдүн бюджеттеринен турат дегенди түшүндүрөт.

(8.5) теңдемесинен $\bar{x}$ ти аныктайлы:

$$(A - E)\bar{x} = \bar{0}. \qquad (8.6)$$

Мисал. Төрт өлкөнүн соода жүргүзүүсүнүн структуралык матрицасы

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$$

көрүнүшүндө, ал эми бюджеттердин суммасы $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6270$ ш.а.б. болгон учурда, балансылануучу дефицитсиз соода жүргүзүүчү өлкөлөрдүн бюджеттерин тапкыла.

◊ Берилген A структуралык матрицасынын $\lambda = 1$ өздүк маанисине тиешелүү $\bar{x}$ өздүк векторун табуу, б.а.

$$\begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & -0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & -0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

теңдемесин чыгаруу керек.

Бул системанын рангы 3 кө барабар болгондуктан, белгисиздердин бири эрктүү белгисиз болот жана калгандары бул белгисиз аркылуу туюнтулат. Системаны Гаусстун ыкмасы менен чыгарып, $\bar{x}$ өздүк векторунун компоненттерин аныктайбыз:

$$x_1 = \frac{140}{121}c, x_2 = \frac{146}{121}c, x_3 = \frac{20}{11}c, x_4 = c.$$

Табылган маанилерди берилген бюджеттердин суммасына коюп, c чоңдугун аныктайбыз: $c = 1210$. Мындан

$x_1 = 1400, x_2 = 1460, x_3 = 2200, x_4 = 1210$ го ээ болобуз ◊

Көнүгүүлөр

Теңдемелер системасын Крамердин ыкмасы менен чыгаргыла:

5.1. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -13 \end{cases}$; 5.2. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$;

5.3. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$;

5.4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 = -6 \end{cases}$.

Теңдемелер системасын Гаусстун ыкмасы менен чыгаргыла:

5.5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$; 5.6. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$;

5.7. $\begin{cases} 4x_1+3x_2+2x_3+5x_4-2x_5=0 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ 9x_1+8x_2+7x_3+7x_4+6x_5=0 \end{cases}$;

5.8. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3-x_4=0 \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2+2x_3+5x_4=0 \end{cases}$;

5.9. $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_2-x_3+2x_4=2 \\ 2x_1+2x_2+3x_4=3 \end{cases}$;

5.10. $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=1 \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=2 \\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5=1 \\ 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5=2 \end{cases}$.

Теңдемелер системасынын чыгарылыштарынын фундаменталдык системасын тапкыла:

5.11. $x_1-2x_2+4x_3-x_4=0$;

5.12. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=0 \\ 2x_1-3x_2+x_3-2x_4=0 \end{cases}$;

5.13. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0 \\ 2x_1-3x_2+x_3=0 \end{cases}$;

5.14. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+2x_3-x_4+4x_5=0 \\ 5x_1+x_2+4x_3-2x_4+7x_5=0 \\ x_1-5x_2+x_5=0 \\ 4x_1-7x_2+2x_3-x_4+5x_5=0 \end{cases}$;

5.15. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+x_2-3x_4=0 \\ 3x_1-x_3+x_4=0 \end{cases}$;

5.16. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+7x_3+3x_4-x_5=0 \\ 3x_1-2x_2-2x_3+x_4-2x_5=0 \\ -3x_1+4x_2+5x_3+3x_4-7x_5=0 \\ 6x_1+2x_2+5x_3+x_4+5x_5=0 \end{cases}$.

АЛТЫНЧЫ ГЛАВА
КӨПТҮКТӨР

§ 1. Көптүктөр. Негизги белгилөөлөр. Көптүктөрдүн үстүнөн жүргүзүлүүчү амалдар

Көптүк түшүнүгү математикадагы негизги түшүнүктөрдүн бири болуп саналат. Система, жыйынды терминдерин «көптүк» сөзүнө синоним катары саноого болот. *Көптүк* деп, анык бир белги боюнча бириктирилген объектилердин жыйындысын айтабыз. Мисалы: кинотеатрдагы көрүүчүлөрдүн көптүгү, группадагы студенттердин көптүгү, жалаң «5» ке жана жалаң «4» кө окуган студенттердин көптүгү, 200 миллиард сомдон аз эмес уставдык фондго ээ болгон коммерциялык банктардын көптүгү ж.б. Көптүк чектүү же чексиз сандагы объектилерден турушу мүмкүн. Мисалы: натуралдык сандардын көптүгү чексиз сандагы объектилерден, ал эми группадагы студенттердин саны чектүү сандагы объектилерден турат.

Көптүктү түзүүчү объектилер *көптүктүн элементтери же чекиттери* деп аталат. Көптүктөрдү чоң тамгалар менен, ал эми көптүктүн элементтерин кичине тамгалар менен белгилейбиз. «X көптүгүнөн алынган x элементи» деген математикалык тилде $x \in X$ (x таандык X ке) түрүндө жазылат. Эгерде x - X көптүгүнүн элементи болбосо, анда $x \notin X$ (x-X ке таандык эмес) жазуусу менен түшүндүрүлөт .

Айталы X жана Y эки көптүгү берилсин. Алардын ортосунда төмөндөгүдөй тиешелүүлүктү аныктоого болот. Эгерде эки көптүк бирдей эле элементтерден турса, анда алар *дал келишет* жана $X = Y$ түрүндө белгиленет. Эгерде X көптүгүнүн бардык элементтери Y көптүгүнө да таандык болсо, анда X толугу менен Y көптүгүнө камтылат жана $X \subset Y$ (X *көптүгү* Y *тин камтылуучу көптүгү болот*) түрүндө белгиленет. Эгерде X көптүгүнүн бир да элементи Y көптүгүнө таандык болбосо, анда X *көптүгү* Y *те камтылбайт* жана $X \not\subset Y$ деп белгиленет.

Математикада $\varnothing$ символу менен белгиленүүчү куру көптүк түшүнүгү колдонулат. Бир да элементти кармабаган көптүк *куру көптүк* деп аталат жана ал каалагандай көптүктүн камтылуучу көптүгү болуп саналат.

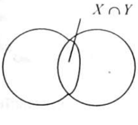
Көптүктөрдүн *суммасы* жана *кесилиши* түшүнүктөрүн кийирели.

X жана Y эки көптүгүнүн *суммасы же биригүүсү* деп, бул көптүктөрдүн жок дегенде бирине таандык болгон элементтердин жыйындысы аталат. Бул көптүктөрдүн суммасы $X \cup Y$ деп белгиленет. Мисалы, X жылдык айлануу каражаты S акчалай бирдигинен төмөн болбогон мамлекеттик ишканалардын көптүгү, ал эми Y жылдык айлануу каражаты S тен кем болбогон мамлекеттик эмес ишканалардын көптүгү болсо, анда $X \cup Y$ – жылдык айлануу каражатынын төмөнкү чеги S болгон ишканалардын көптүгү болот.

Каалагандай X көптүгүнө куру көптүктү кошуудан эч нерсе өзгөрбөйт, б.а. $X \cup \varnothing = X$ болот.

X жана Y көптүктөрүнүн *кесилиши же жалпы бөлүгү* деп, бир эле учурда X көптүгүнө да, Y көптүгүнө да таандык болгон элементтерден турган көптүк аталат. Бул кесилиш $X \cap Y$ деп белгиленет. Мисалы, X – жылдык айлануу каражаты T - s тен төмөн болбогон ишканалардын, ал эми Y - жылдык айлануу каражаты S тен көп эмес болгон ишканалардын жыйындысы болсо(мында $s < S$), анда $X \cap Y$ көптүгүнө жылдык айлануу каражаты $s \le T \le S$ барабарсыздыгын канааттандырган Tга барабар болгон ишканалардын көптүгү кирет.

Бир эле убакта X жана Y көптүктөрүнүн касиеттерине ээ болбогон элементтердин жоктугу бул көптүктөрдүн кесилиши бош көптүк экендигин билдирет. Схемалык түрдө эки көптүктүн кесилиши төмөндөгү сүрөттө көрсөтүлгөн(1.1-чийме).



1.1-чийме

X жана Y көптүктөрүнүн *айырмасы* деп, X көптүгүнүн Y ке таандык болбогон бардык элементтерден кармоочу Z көптүгү аталат жана $Z = X / Y$ деп белгиленет. Көптөгөн математикалык түшүнүктөрдө айрым сөз же сүйлөмдөрдү жазуу үчүн логикалык символдорду пайдалануу ыңгайлуу болот. «X көптүгүнөн алынган каалагандай x» сөзүнүн ордуна $\forall x \in X$ символун пайдалануу ыңгайлуу. Мында латын тамгасы англис тилиндеги *any* – каалагандай сөзүнүн башкы тамгасынан алынган. Ушуга окшош түрдө «X көптүгүнөн алынган x элементи жашайт» сөзүн $\exists x \in X$ деп белгилейбиз. Мында $\exists$ белгиси англис тилиндеги *existence* - жашоо сөзүнүн баштапкы тамгасынан алынган. Ушул сыяктуу белгилөөлөр кеңири колдонулат.

§2. Чыныгы сандар жана алардын касиеттери

Чыныгы сандардын көптүгү чексиз көптүк болуп эсептелет. Бул көптүк рационалдык жана иррационалдык сандардан турат. p/q түрүндөгү сандар *рационалдык сандар* деп аталат, мында p,q – бүтүн сандар. Рационалдык болбогон каалагандай чыныгы сандар *иррационалдык* деп аталышат. Каалагандай рационалдык сан же бүтүн сан болот, же чектүү же мезгилдүү чексиз ондук бөлчөк түрүндө көрсөтүлөт. Мисалы, 1/9 рационалдык санын 0,11111... түрүндө көрсөтүүгө болот. Иррационалдык сандар чексиз мезгилсиз ондук бөлчөктү берет, мисалы: $\sqrt{2}=1,41421356...$, $\pi=3,14159265...$.

Чыныгы сандардын үстүнөн төмөндөгүдөй амалдарды жүргүзүүгө болот.

1. Чыныгы сандарды кошуу жана көбөйтүү. Каалагандай a жана b түгөй чыныгы сандары үчүн алардын суммасы жана көбөйтүндүсү деп аталуучу, $a+b$ жана $a \cdot b$ чыныгы сандары жалгыз гана түрдө аныкталат. Каалагандай a,b,c сандары үчүн төмөндөгүдөй касиеттер орун алат.

1^0. $a+b=b+a, a \cdot b=b \cdot a$ (орун алмаштыруу касиети);

2^0. $a+(b+c)=(a+b)+c, a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$ (топтоштуруу касиети);

3^0. $(a+b) \cdot c=a \cdot c+b \cdot c$ (бөлүштүрүү касиети);

4^0. Каалагандай a саны үчүн $a+0=a$ боло тургандай жалгыз гана 0 саны жашайт.

5^0. Каалагандай a саны үчүн $(-a)$ саны табылып, $a+(-a)=0$ орун алат;

6^0. Нөлдөн айырмалуу болгон жалгыз гана $1 \neq 0$ саны табылып, каалагандай a саны үчүн $a \cdot 1=a$ барабардыгы орун алат;

7^0. Каалагандай $a \neq 0$ саны үчүн кандайдыр бир $a^{-1}=\frac{1}{a}$ саны табылып, $a \cdot a^{-1}=1$ орун алат.

2. Чыныгы сандарды салыштыруу. Каалагандай эки чыныгы сан үчүн төмөндөгү үч катыштын бири сөзсүз орун алат: $a=b, a>b$ же $a<b$.

Барабардык катышы *транзитивдүүлүк* касиетине ээ: эгерде $a=b$ жана $b=c$ болсо, анда $a=c$ болот.

"Чоң" катышы төмөндөгүдөй касиеттерге ээ:

8^0. Эгерде $a>b$ жана $b>c$ болсо, анда $a>c$ болот.

9^0. Эгерде $a>b$ болсо, анда $a+c>b+c$ болот.

10^0. Эгерде $a>0$ жана $b>0$ болсо, анда $ab>0$ болот.

$a>b$ катышынын ордуна $b<a$ катышы да колдонулат. $a \geq b (b \leq a)$ жазуусу $a=b$ же $a>b$ дегенди билдирет. $>, <, \leq$ жана $\geq$ белгилери менен жазылган катыштар барабарсыздыктар деп, ал эми $>, <$ белгилери менен гана жазылган катыштар накта барабарсыздыктар деп аталышат.

11^0. Каалагандай чыныгы сандарды рационалдык сандар менен каалагандай тактыкта жакындаштырууга болот.

3. Чыныгы сандардын үзгүлтүксүздүгү.

12^0. Айталы чыныгы сандардын X жана Y көптүктөрү берилсин. Эгерде каалагандай $x \in X$ жана $y \in Y$ сандары үчүн $x \le y$ барабарсыздыгы орун алса, анда жок дегенде бир c саны табылып, бардык x жана y тер үчүн $x \le c \le y$ барабарсыздыгы орун алат.

Үзгүлтүксүздүк касиетине бардык чыныгы сандардын көптүгү ээ болот, бирок рационалдык сандардан турган көптүк гана бул касиетке ээ эмес.

Ошентип, чыныгы сандар 1^0-12^0- касиеттерине ээ болгон элементтердин көптүгүн берет. Бул аныктама *аксиоматикалык* деп аталат, ал эми 1^0-12^0-касиеттери чыныгы сандардын *аксиомалары* деп аталышат.

§ 3. Сан огу жана анда берилген көптүктөр

Эгерде кандайдыр бир закон же эреженин негизинде ар бир $x \in X$ элементине $y \in Y$ элементи тиешелүү коюлса, анда X жана Y көптүктөрүнүн ортосунда *туура келүүчүлүк* түзүлдү деп айтабыз.

Эгерде каалагандай $x \in X$ элементине бир гана $y \in Y$ элементи тиешелүү коюлса жана тескерисинче, каалагандай $y \in Y$ элементине бир гана $x \in X$ элементи тиешелүү болсо, анда мындай туура келүүчүлүк *өз ара бир маанилүү* деп аталат.

Чыныгы сандардын көптүгү менен түз сызыктагы чекиттердин көптүгүнүн ортосунда өз ара бир маанилүү туура келүүчүлүктү түзүүгө болот. Бул чыныгы сандарды сан огунда геометриялык сүрөттөөгө мүмкүндүк берет. Түз сызыктан эсептөө башталышы болгон O чекитин, эсептөө багытын жана масштаб бирдигин тандап алалы (3.1-чийме).

3.1-чийме

Бул үч чондук сан(координаталык) огун толугу менен аныктайт. Сан огунда чыныгы сандар чекиттер катары сүрөттөлүшөт.

Айталы M сан огундагы каалагандай чекит болсун.

M чекити эсептөө башталышынын оң жагында жайланышса "+" белгиси, ал эми сол жагында жайланышса "-" белгиси менен алынган OM кесиндисинин узундугуна барабар болгон x санын бул чекитке тиешелүү коелу. Анда x саны M *чекитинин координатасы* деп аталат. Тескерисинче, ар бир x чыныгы санына координаталык окто, координатасы x ке барабар болгон анык бир чекит тиешелүү коюлат.

Айталы, $a>b$ болгон a жана b сандары берилсин. Эң көп колдонулган сандык көптүктөрдүн айрымдарын көрсөтөлү:

1) $a \le x \le b$ барабарсыздыгын канааттандыруучу бардык сандардын көптүгү кесинди (сегмент) деп аталат жана $[a,b]$ түрүндө белгиленет;

2) $a<x<b$ накта барабарсыздыгын канааттандыруучу бардык сандардын көптүгү интервал деп аталат жана (a,b) түрүндө белгиленет;

3) бардык чыныгы сандардын көптүгүн $-\infty<x<+\infty$ же $(-\infty,+\infty)$ деп белгилейбиз;

4) 1-3 пункттарга окшош түрдө эле $(a,b]$,$[a,b)$,$(a,+\infty)$,$(-\infty,b)$ жана $(-\infty,b]$ түрүндөгү сандык көптүктөрдү аныктоого болот.

Бул көптүктөрдүн баары аралыктар деп аталышат. Биринчи, экинчи жана төртүнчү пункттун алгачкы эки аралыктары чектүү деп айтышат, мында a жана b сандары алардын учтары болот. Калган аралыктардын баары чексиз деп аталышат. 4-пункттагы биринчи эки аралыктар жарым интервалдар деп да айтабыз.

Сан аралыктарына координаталык октогу аралыктар тиешелүү келет. M_1 чекити a координатасына, ал эми M_2 чекити b координатасына ээ болсо, $[a,b]$ сегменти M_1M_2 кесиндиси аркылуу сүрөттөлөт. Бардык координаталык түз сызык бардык чыныгы сандардын көптүгүнүн сүрөттөлүшү болуп эсептелет. Ошондуктан $(-\infty,+\infty)$ көптүгү *сан огу* деп, ал эми бул түз сызыктагы каалагандай сан *чекит* деп аталат.

§ 4. Сандык көптүктөрдүн чектери

Эгерде кандайдыр бир d саны аныкталып, каалагандай $x \in X$ үчүн $x \le d$ ($x \ge d$) барабарсыздыгы орун алса, анда X көптүгүн *жогору (төмөн) жагынан чектелген* деп айтабыз. Мында d саны X көптүгүнүн *жогорку (төмөнкү) чеги* деп аталат. Жогору жана төмөн жагынан чектелген көптүк *чектелген* деп аталат. $(a;+\infty)$ $((-\infty;b))$ интервалы төмөн (жогору) жагынан чектелген, бирок жогору (төмөн) жагынан чектелбеген көптүктү сүрөттөп турат. Бардык сан огу төмөн жагынан да, жогору жагынан да чектелбеген.

Жогору (төмөн) жагынан чектелген каалагандай көптүк чексиз көп сандагы жогорку (төмөнкү) чектерге ээ. Чындыгында, эгерде d саны X көптүгүнүн жогорку чеги болсо, анда каалагандай $d_1>d$ саны да, жогорку чектин аныктоосу боюнча бул көптүктүн жогорку чеги болуп эсептелет. Жогору жагынан чектелген көптүктүн жогорку чектеринин эң кичинеси бул көптүктүн *накта жогорку чеги* деп аталат жана $\sup X$ түрүндө белгиленет. Төмөн жагынан чектелген X көптүгүнүн төмөнкү чектеринин эң чоңу бул көптүктүн *накта төмөнкү чеги* деп аталат жана $inf\,X$ түрүндө белгиленет. Бул символдор латын тилиндеги *supremum* - эң жогорку жана inf *imum* - эң төмөнкү сөздөрүнөн алынган.

Айрым мисалдарды келтирели. Айталы $X=(a,b)$ болсун. Бул учурда a жана b лар X көптүгүнүн накта жогорку жана накта төмөнкү чектери болушат, б.а. $a=inf\,X, b=sup\,X$ болот. Айталы $X=(-\infty;b)$ болсун. Анда бул учурда X көптүгүнүн төмөнкү чектери жашабайт жана накта төмөнкү чекке да ээ эмес, ал эми b саны X көптүгүнүн накта жогорку чеги болот: $b=sup\,X$.

Биз сандык көптүктүн накта жогорку (төмөнкү) чегинин жашашы жөнүндөгү теореманы далилдөөсүз келтиребиз.

Теорема. Эгерде куру эмес сандык көптүк жогору (төмөн) жагынан чектелсе, анда ал накта жогорку (төмөнкү) чекке ээ (далилдөөсү [1,5] адабияттарда).

§ 5. Сандын абсолюттук чоңдугу

Биз, x чыныгы санынын *абсолюттук чоңдугу же модулу* деп,

$$|x|=\begin{cases} x, \text{эгерде} & x\ge 0, \\ -x, \text{эгерде} & x<0, \end{cases}$$

санын айтабыз.

Бул аныктамадан абсолюттук чоңдуктун төмөнкү касиеттери келип чыгат:

1^0. $|x|\ge 0$.

2^0. $|x|=|-x|$.

3^0. $-|x|\le x\le |x|$.

4^0. a оң саны үчүн $|x|\le a$ жана $-a\le x\le a$ барабарсыздыктары тең күчтүү болушат.

5^0. Каалагандай x жана y чыныгы сандары үчүн

$$|x+y|\le|x|+|y|,$$
$$|x-y|\le|x|+|y|$$

барабарсыздыктары орун алат.

6^0. Каалагандай x жана y чыныгы сандары үчүн $|x-y|\ge|x|-|y|$ орун алат.

7^0. $$\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|};\quad |xy|=|x||y|.$$

Мисал. $|x-|x||$ туюнтманы абсолюттук белгиси жок жазгыла.

◊ Эгерде $x\ge 0$ болсо, анда $|x|=x$ жана

$|x-|x||=|x-x|=|0|=0$ болот. Ал эми $x<0$ болсо, анда $|x|=-x$ жана

$$|x-|x||=|x-(-x)|=|x+x|=|2x|=|2||x|=2(-x)=-2x \quad \Diamond$$

Көнүгүүлөр

Барабарсыздыктарды чыгаргыла:

6.1. $|x+1|<0{,}01$;

6.2. $|x-2|\geq 10$;

6.3. $|x|>|x+1|$;

6.4. $|2x-1|<|x-1|$;

6.5. $|x+2|+|x-2|\leq 12$;

6.6. $|x+2|-|x|>1$;

6.7. $||x+1|-|x-1||<1$.

ЖЕТИНЧИ ГЛАВА
САНДЫК УДААЛАШТЫКТАР

§ 1. Сандык удаалаштыктар жана алардын үстүнөн жүргүзүлүүчү амалдар

Сандык удаалаштыктар сандардын чексиз көптүгүн берет. Удаалаштыкка мисал катары төмөндөгүлөрдү айтсак болот. Чексиз геометриялык прогрессиянын бардык мүчөлөрүнүн удаалаштыгы, $\sqrt{2}$ санынын жакындаштырылган маанилеринин удаалаштыгы $x_1 = 1, x_2 = 1{,}4, x_3 = 1{,}41, \dots$, туура n бурчтуктардын периметрлеринин удаалаштыгы ж.б.

Аныктама. Эгерде $1,2,\dots,n,\dots$ натуралдык катардын ар бир n санына x_n чыныгы саны туура келсе, анда

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \tag{1.1}$$

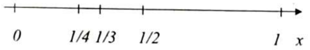
чыныгы сандарынын көптүгү *сандык удаалаштык* же жөн эле *удаалаштык* деп аталат.

$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ сандары (1.1) удаалаштыгынын *элементтери же мүчөлөрү* деп аталышат; x_n – бул удаалаштыктын *жалпы элементи же жалпы мүчөсү* деп, ал эми n саны анын *номери* деп аталат. (1.1) удаалаштыгын кыскача $\{x_n\}$ деп белгилейбиз. Мисалы, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ символу

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

сандык удаалаштыгын билдирет. Башкача айтканда, удаалаштык аркылуу номерленген элементтердин көптүгүн же (n, x_n) түгөй сандарынын чексиз көптүгүн түшүнүүгө болот. Эгерде удаалаштыктын каалагандай элементин алуу жолу көрсөтүлсө, анда удаалаштык берилди деп эсептелинет. Мисалы, $x_n = -1 + (-1)^n$ формуласы 0,2,0,2,… удаалаштыгын аныктайт.

Геометриялык жактан удаалаштыктар координаталары удаалаштыктын тиешелүү мүчөлөрүнө барабар болгон чекиттердин удаалаштыгы катары, сан огунда сүрөттөлүшөт. (1.1) - чиймеде $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ удаалаштыгынын сан огундагы сүрөттөлүшү берилген.



1.1-чийме

§ 2. Жыйналуучу удаалаштыктар түшүнүгү

1-аныктама. Эгерде каалагандай $\varepsilon > 0$ саны үчүн кандайдыр бир N номери аныкталып, бардык $n > N$ номери үчүн

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad (2.1)$$

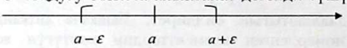
барабарсыздыгы орун алса, анда a санын $\{x_n\}$ *удаалаштыгынын предели* деп айтабыз.

Пределге ээ болгон удаалаштык *жыйналуучу удаалаштык* деп аталат. Эгерде $\{x_n\}$ удаалаштыгынын предели a саны болсо, анда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ түрүндө жазылат же $n \to \infty$ да $x_n \to a$ умтулат деп айтылат. Пределге ээ болбогон удаалаштыктар *таралуучу удаалаштыктар* деп аталышат.

2-аныктама. $a = 0$ пределине ээ болгон удаалаштык *чексиз кичине удаалаштык* деп аталат.

1-эскертүү. Айталы $\{x_n\}$ удаалаштыгы a пределине ээ болсун. Анда $\{\alpha_n\} = \{x_n - a\}$ удаалаштыгы чексиз кичине удаалаштык болот, б.а. a пределине ээ болгон жыйналуучу удаалаштыктын каалагандай элементин $x_n = a + \alpha_n$ түрүндө көрсөтүүгө болот. Мында α_n чексиз кичине $\{\alpha_n\}$ удаалаштыгынын элементи.

2-эскертүү. (2.1) барабарсыздыгы модулдун 4^0-касиети боюнча $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ же $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ барабарсыздыгына эквиваленттүү. Бул $n > N$ болгондо $\{x_n\}$ удаалаштыгынын бардык элементтери a чекитинин ε аймагында (2.1-чийме) жайланышат жана N номери ε чоңдугу боюнча аныкталат дегенди түшүндүрөт.



2.1-чийме

Бул аныктамага геометриялык интерпретация берели. Удаалаштык сандардын чексиз көптүгүн көрсөтүп тургандыктан, эгерде удаалаштык жыйналуучу болсо, анда сан огундагы a чекитинин каалагандай ε аймагында бул удаалаштыктын элементтери болгон чексиз сандагы чекиттердин көптүгү табылат, ал эми ε аймагынын сыртында чектүү сандагы элементтер калат.

3-эскертүү. Чектелбеген удаалаштык чектүү пределге ээ болбойт. Бирок, бул удаалаштык чексиз пределге ээ болушу мүмкүн. Чексиз предел

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \qquad (2.2)$$

түрүндө жазылат.

Эгерде бул учурда кандайдыр бир номерден баштап удаалаштыктын бардык мүчөлөрү оң (терс) болсо, анда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad (\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty)$$

деп белгиленет.

Эгерде $\{x_n\}$ - чексиз кичине удаалаштык болсо, анда $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ удаалаштыгы (2.2) чексиз пределине ээ болуучу чексиз чоң удаалаштык болот жана тескерисинче.

Жыйналуучу жана таралуучу удаалаштыктарга мисал келтирели.

1-мисал. Удаалаштыктын пределинин аныктамасын пайдаланып,

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ экендигин көрсөткүлө.

◊ Каалагандай $\varepsilon > 0$ санын алалы.

$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}$ болгондуктан, (2.1) барабарсыздыгы аткарылыш үчүн $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ барабарсыздыгын чыгаруу жетиштүү болот. Мындан $n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ ээ болобуз. $|x_n - 1| < \varepsilon$ барабарсыздыгы бардык $n > N$ дерде орун алгыдай кылып, N номери үчүн $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ санынын бүтүн бөлүгүн, б.а. $N = \left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]$ алуу жетиштүү ◊

2-мисал. $\{x_n\} = (-1)^n$ же $-1;1;...;-1;1;...$ удаалаштыгы пределге ээ эмес экендигин көрсөткүлө.

◊ Чындыгында, предел катары биз -1 же 1 ди албайлы, удаалаштыктын пределинин аныктамасы (2.1) барабарсыздыгы $\varepsilon < 0{,}5$ болгондо аткарылбайт. Анткени, ε аймагынын сыртында чексиз көп сандагы x_n элементтери калат: так номерлүү бардык элементтери -1 ге, ал эми жуп номерлүү бардык элементтери 1 ге барабар болот ◊

§ 3. Жыйналуучу удаалаштыктардын негизги касиеттери

Жыйналуучу удаалаштыктардын бир нече касиеттерин санап өтөлү.

1^0. Эгерде $\{x_n\}$ чексиз кичине удаалаштыгынын бардык элементтери бир эле c санына барабар болушса, анда $c = 0$.

2^0. Жыйналуучу удаалаштык бир гана пределге ээ болот.

3^0. Жыйналуучу удаалаштык чектелген болот.

4^0. $\{x_n\}$ жана $\{y_n\}$ жыйналуучу удаалаштыктарынын суммасы (айырмасы) да жыйналуучу удаалаштык болот жана анын предели бул удаалаштыктардын пределдеринин суммасына (айырмасына) барабар.

5^0. $\{x_n\}$ жана $\{y_n\}$ жыйналуучу удаалаштыгынын көбөйтүндүсү да жыйналуучу удаалаштык болот жана анын предели $\{x_n\}$ жана $\{y_n\}$ жыйналуучу удаалаштыктарынын пределдеринин көбөйтүндүсүнө барабар.

6^0. $\{y_n\}$ удаалаштыгынын предели 0 дөн айырмалуу болгон учурда, $\{x_n\}$ жана $\{y_n\}$ жыйналуучу удаалаштыктарынын катышы да жыйналуучу удаалаштык болот жана анын предели $\{x_n\}$ жана $\{y_n\}$ удаалаштыктарынын пределдеринин катышына барабар.

7^0. Эгерде кандайдыр бир номерден баштап $\{x_n\}$ жыйналуучу удаалаштыгынын элементтери $x_n \geq b, (x_n \leq b)$ барабарсыздыгын канааттандырса, анда бул удаалаштыктын предели a да $a \geq b, (a \leq b)$ барабарсыздыгын канааттандырат.

8^0. Чексиз кичине удаалаштыкты чектелген удаалаштыкка же кандайдыр бир санга көбөйтүүдөн алынган удаалаштык да чексиз кичине удаалаштык болот.

9^0. Чексиз кичине удаалаштыкты чектүү сандарга көбөйтүүдөн чексиз кичине удаалаштык келип чыгат.

Бул касиеттердин колдонулушуна мисалдар келтирели.

1-мисал. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n^2 + 2n + 4}{4n^2 + n - 3}$ пределин тапкыла.

◇ $n \to \infty$ умтулганда бөлчөктүн бөлүмү да, алымы да чексизге умтулат, б.а. 6^0 - касиетти түз эле пайдаланууга болбойт. Берилген бөлчөктүн алымын да, бөлүмүн да n^2 ка бөлүп, андан кийин 6^0 жана 4^0 - касиеттерди пайдаланабыз:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3n^2 + 2n + 4}{4n^2 + n - 3}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{3 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty}\left(3 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n \to \infty}\left(4 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n \to \infty} 3 + \lim\limits_{n \to \infty} \frac{2}{n} + \lim\limits_{n \to \infty} \frac{4}{n^2}}{\lim\limits_{n \to \infty} 4 + \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} - \lim\limits_{n \to \infty} \frac{3}{n^2}} = \frac{3+0+0}{4+0-0} = \frac{3}{4} \quad ◇$$

2-мисал. $n \to \infty$ умтулганда $\{x_n\} = \dfrac{\sqrt{n}\,\cos\, n}{n+1}$ удаалаштыгынын пределин тапкыла.

◊ Бөлчөктүн бөлүмүн да, алымын да n ге бөлөбүз.

$$\lim_{n\to\infty}\{x_n\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cos n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\cos n}{1+\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\cos n\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}},$$

бөлчөктүн алымында чексиз кичине чоңдуктун чектелген чоңдукка болгон көбөйтүндүсү турат, анда 8^0 - касиет боюнча $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\}=\frac{0}{1+0}=0$ гө ээ болобуз ◊

3-мисал. $n\to\infty$ умтулганда $\{x_n\}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ удаалаштыгынын пределин тапкыла.

◊ $\{x_n\}$ удаалаштыгынын кошулуучулары да чектүү пределге ээ болбогондуктан 4^0-касиетти түз колдонууга болбойт. $\{x_n\}$ түйүндөш элементи $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ көбөйтүп жана бөлүп жиберебиз:

$$\lim_{n\to\infty}\{x_n\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\frac{0}{1+1}=0 \qquad ◊$$

e - саны.

Жалпы мүчөсү $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ формуласы менен туюнтулган $\{x_n\}$ удаалаштыгын карайлы.

Математикалык анализ курсунда бул удаалаштык монотондуу өсө тургандыгы жана пределге ээ экендиги далилденет. Бул предел e саны деп аталат.

Аныктама боюнча $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

e саны математикада чоң мааниге ээ. Мындан ары каалагандай талап кылынган тактыкта аны эсептөө жолдору каралат. e саны иррационалдык сандарга кирет жана анын жакындаштырылган мааниси $e=2{,}7182818...$ барабар.

§ 4. Сандык удаалаштыктын экономикадагы колдонулуштары

e - санынын колдонулушуна мисалдар келтирели.

1-мисал. Финансылык математика курсунан татаал процентти эсептөө формуласы

$$Q = Q_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \tag{4.1}$$

түрүндө берилээри белгилүү. Мында, Q_0 - банктагы алгачкы сумма, p - анык бир убакыт аралыгында эсептелинүүчү процент, n- акча сакталуучу убакыт мезгилдеринин саны, Q - бул n убакыт аралыгынан кийинки акчанын суммасы. (4.1) түрүндөгү формулалар экономиканы прогноздоодо (улуттук продукцияны өндүрүү көлөмүнүн өсүшү) жана демографиялык эсептөөлөрдө (калктын санынын өсүшү) да колдонулат.

Айталы, Q_0 алгачкы суммасы жылына $p = 100\%$ менен банкка салынып, бир жылда $2Q_0$ сумманы түзсүн. Ал эми, жарым жылдан кийин сумма $Q_1 = Q_0\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}Q_0$ барабар болуп, ошол эле банкка кайрадан салынсын. Жыл акырында банктагы сумма $Q_2 = Q_0\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25\,Q_0$ барабар болот.

Акчаны банкка сактоо мөөнөтүн азайталы. Эгерде процент квартал сайын эсептелинсе, анда жыл аягында сумма $Q_3 = Q_0\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \approx 2{,}37\,Q_0$ түзөт. Эгерде бул операция ай сайын жүргүзүлсө, анда жыл ичиндеги сумма

$$Q_{12} = Q_0\left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} \approx 2{,}61\,Q_0,$$

ал эми күн сайын жүргүзүлсө

$$Q_{365} = Q_0\left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} \approx 2{,}714\,Q_0,$$

саат сайын жүргүзүлсө

$$Q_{8720} = Q_0\left(1 + \frac{1}{8720}\right)^{8720} \approx 2{,}718\,Q_0$$

ж.б. түзөт.

Мындан алгачкы $\{q_n\} = \left\{\frac{Q_n}{Q_0}\right\}$ сумманын өсүү маанилеринин удаалаштыгы $n \to \infty$ да e санына умтула турган удаалаштык менен дал келе тургандыгын көрүү кыйын эмес. Ошентип, процент үзгүлтүксүз эсептелинген учурда алынуучу киреше жыл ичинде $\lim\limits_{n\to\infty}(Q_n - Q_0)\frac{100\,\%}{Q_0} = (e-1)100\,\% \approx 172\,\%$ көп болбойт.

Жалпы учурда, эгерде p- эсептөө процентти жана жыл n мезгилге бөлүнсө, анда t жылдан кийин алынуучу сумма $Q_n = Q_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$, $r=\frac{p}{100}$ барабар болот. Бул туюнтманы

$Q_n = Q_0\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{rt}$ түрүндө жазууга болот.

$m=\frac{n}{r}$ жаңы өзгөрүлмөсүн кийирели. Анда $n\to\infty$ умтулганда $m\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \lim_{m\to\infty} Q_0\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^{rt} = Q_0 e^{rt}.$$

Акыркы формула боюнча жүргүзүлгөн эсептөөлөр үзгүлтүксүз процент боюнча эсептөөлөр деп аталышат.

2 – мисал. Айталы инфляция темпи күнүнө бир процентти түзсүн. Анда алгачкы сумма жарым жылдан кийин канчага азаят?

◊ Татаал процентти эсептөө формуласын пайдаланабыз.
$Q = Q_0\left(1-\frac{1}{100}\right)^{182}$, Q_0 – алгачкы сумма, 182 - жарым жылдагы күндөрдүн саны. Бул туюнтманы өзгөртүп түзүү аркылуу $Q = Q_0\left[\left(1-\frac{1}{100}\right)^{-100}\right]^{-\frac{182}{100}t} \approx Q_0 e^{-1,82} = \frac{Q_0}{e^{1,82}}$ ээ болобуз, б.а. инфляция алгачкы сумманы болжол менен 6 эсеге азайтат ◊

Көнүгүүлөр

Төмөндөгү пределдерди эсептегиле:

7.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+2}{6n-3}$; 7.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{5n-1}$;

7.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3-2n+1}{3n^3-5n}$; 7.4. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})$;

7.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$; 7.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2+2}{3n^3+4n}$.

7.7. Калктын санынын өсүүсү жылына 5% ти түзсө, канча жылда калктын саны 2 эсеге көбөйөт?

7.8. Инфляция темпи айына 6% ти түзсө, анда кредиттөөдөн алынган пайда жылына 12% ти түзүшү үчүн кредит үчүн коюлган жылдык проценттик ставка кандай болушу керек?

СЕГИЗИНЧИ ГЛАВА
БИР ӨЗГӨРҮЛМӨЛҮҮ ФУНКЦИЯЛАР

§1. Функция түшүнүгү

1. Функционалдык көз карандылыктын аныктамасы

1-аныктама. Айталы X жана Y кандайдыр бир сандык көптүктөр болсун жана ар бир $x \in X$ элементине кандайдыр бир f закону же эрежеси боюнча жалгыз $y \in Y$ элементи тиешелүү коюлсун. Анда $y = f(x)$ закону боюнча y тин x тен функционалдык көз карандылыгы аныкталды деп айтабыз. Мында x ти *көз каранды эмес өзгөрүлмө (же аргумент)* деп, y ти *көз каранды өзгөрүлмө* деп, X көптүгү функциянын *аныкталуу (жашоо) областы* деп, Y көптүгү *функциянын маанилеринин (өзгөрүү) областы* деп аталат.

Функцияны $y = y(x), y = F(x), y = g(x)$ ж.б. түрүндө да жазууга болот.

Эгерде функциянын маанилеринин Y көптүгү чектелген болсо, анда функция чектелген, ал эми тескери учурда чектелбеген функция деп аталат.

2. Функциянын берилиш жолдору. Функциянын берилиш жолу деп, функциянын аныктамасы боюнча, функциянын аныкталуу областындагы аргументтин ар бир маанисине, функкиянын маанилеринин областындагы көз каранды өзгөрүлмөнүн маанисин тиешелүү коюучу законду көрсөтүүнү түшүнөбүз. Функцияны берүүнүн негизги үч жолу бар: таблицалык, аналитикалык, графикалык.

а) Таблицалык жолу. Илимдин түрдүү тармактарында: эксперименталдык ченөөлөрдө, социологиялык изилдөөлөрдө, бухгалтердик отчеттордо жана банктык аракеттерде таблицалык жол кеңири колдонулушка ээ. Эреже катары мындай таблицаларда чоңдуктардын жок дегенде бирин көз каранды эмес (мисалы: убакыт) деп алабыз, анда калган чоңдуктар бул аргументтен функция болушат.

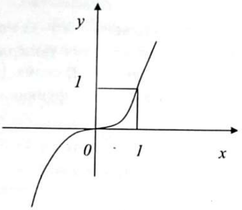
Берилгендердин базасы, маалыматтарды сактоо жана кайра иштетүү, таблицалык жол менен берилет, демек функционалдык көз карандылык таблицалык формасында берилет.

б) Аналитикалык жолу. Мында аргумент жана функциянын ортосундагы байланыш формула түрүндө берилет.

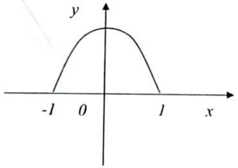
Функциянын аналитикалык берилишине мисалдар келтирели.

1-мисал. $y = x^3$ функциясы $-\infty < x < \infty$ чексиз сан огунда берилген. Бул функциянын маанилеринин көптүгү да $-\infty < y < \infty$

чексиз сан огу болот. Ал эми графиги кубдук параболаны берет (1.1-чийме).



1.1-чийме



1.2-чийме

2-мисал. $y=\sqrt{1-x^2}$ функциясы [-1;1] кесиндисинде аныкталган, ал эми маанилеринин көптүгү [0;1] кесиндиси. Бул функция жогорку жарым тегиздикте жатуучу айлананын бөлүгүн берет (1.2-чийме).

3-мисал. $y = signx = \begin{cases} 1, \text{ эгерде } x>0, \\ 0, \text{ эгерде } x=0, \\ -1, \text{ эгерде } x<0. \end{cases}$

функциясы $(-\infty,\infty)$ чексиз аралыгында аныкталган, маанилеринин көптүгү -1,0,1 үч санынан турат (1.3-чийме). Мында стрелкалар, жарым түз сызыктар ордината огундагы чекиттерге ээ эмес дегенди билдирет, себеби $x=0$ маанисинде функция башка тиешелүүлүк менен аныкталат.

в) Графиктик жолу. Мында аргумент менен функциянын ортосундагы тиешелүүлүк графиктин жардамында берилет. Бул жол өзү жазуучу приборлор (осциллографтар, сейсмографтар ж.б.) менен эксперименталдык ченөөлөрдү жүргүзүүдө көп колдонулат.

3. Функциянын аныкталуу областы. Функциянын аныкталуу областын табууну карайлы.

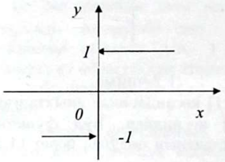
а) Функция

$$y=f(x), \tag{1.1}$$

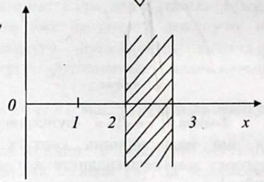
түрүндө аналитикалык түрүндө берилсе жана эч кандай башка чектөөлөр болбосо, анда бул функциянын аныкталуу областы (1.1) формуласындагы математикалык операциянын аткарылыш эрежеси боюнча аныкталат. Бул чектөөлөр бизге белгилүү: жуп тамыр алдындагы туюнтма терс эмес; бөлчөктүн бөлүмү нөлдөн айырмалуу; логарифма алдындагы туюнтма оң ж.б. Аныкталуу областын табууга мисал келтирели.

4-мисал. $y = log_2(x^2 - 5x + 6)$ функциясынын аныкталуу областын тапкыла.

◊ Бул функциянын аныкталуу областы $x^2 - 5x + 6 > 0$ шартынан табылат. Логарифма алдындагы көп мүчөнүн тамырлары $x_1 = 2$ жана $x_2 = 3$ болгондуктан, алынган шарт $(-\infty, 2)$ жана $(3, \infty)$ чексиз интервалдарында аткарылат. 1.4-чиймеде функциянын аныкталбаган бөлүгү штрихтелип көрсөтүлгөн ◊



1.3-чийме



1.4-чийме

5-мисал. $y = arcsin\dfrac{1}{x+2}$ функциясынын аныкталуу областын тапкыла.

◊ Бул функциянын аныкталуу областы төмөнкү эки шарттын жыйындысынан табылат: *arcsin* тун аргументинин модулу боюнча бирден ашып кетпейт жана бөлчөктүн бөлүмү нөлдөн айырмалуу болот, б.а. $-1 \le \dfrac{1}{x+2} \le 1,\ x \ne -2.$ Бул кош барабарсыздык $x + 2 \ge 1$ жана $x + 2 \le -1$ эки жөнөкөй барабарсыздыктарына эквиваленттүү. Мында функциянын аныкталуу областы эки чексиз аралыктардан $(-\infty; -3]$ жана $[-1; +\infty)$ тураары белгилүү. $x \ne -2$ чекити бул аралыктарга кирбейт. Мурдагы мисалдан айырмаланып бул учурда интервалдардын учтары аныкталуу областына кирет ◊

б) $f(x)$ функциянын аныкталуу областы функциянын өзү менен бирге берилген учур, мисалы, $y = 3x^{-\frac{4}{3}} + 2,\ 1 \le x \le 4$.

в) Функция анык бир колдонмо мүнөзгө ээ жана анын маанилеринин областы ага кирүүчү параметрлердин мааниси аркылуу аныкталган учур.

2-аныктама. Эгерде $y = f(x)$ функциясынын аныкталуу областындагы аргументтин каалагандай мааниси үчүн $f(-x) = f(x)$ шарты орун алса, анда бул функция *жуп функция* деп аталат.

3-аныктама. Эгерде $f(-x) = -f(x)$ шарты орун алса, анда $y = f(x)$ функциясы *так функция* деп аталат.

6-мисал. Функциялардын так, жуптугун аныктагыла.

а) $y = x^2$; $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ - жуп функция.

б) $y = x^3$; $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ - так функция.

в) $y = \cos x$; $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$ - жуп функция.

г) $y = \sin x$; $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$ - так функция.

4. Экономикадагы колдонулушу. Функциялардын экономикагы колдонулушуна мисал келтирели.

а) Суроо-талап жана сунуш ийри сызыктары. Тең салмактуулук чекити. D – суроо-талап жана S – сунуштун товардын баасы Pдан болгон көз карандылыгын карайлы. Баа канчалык төмөн болгон сайын калктын туруктуу керектөөсүндөгү суроо-талап ошончолук чоң болот. Көп учурларда суроо-талаптын баадан көз карандылыгы

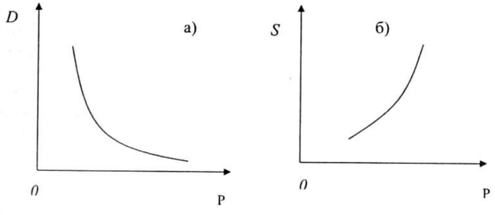
$$D = P^a + c \qquad (1.2)$$

ийри сызыгы менен берилет, мында $a < 0$ (1.5-чийме, а)).

Товардын баасы өскөн сайын ага болгон сунуш да өсөт. Ошондуктан, Sтин P дан көз карандылыгы

$$S = P^b + d, \qquad (1.3)$$

(мында $b \geq 1$) мүнөздүк формуласы менен берилет (1.5-чийме, б)).



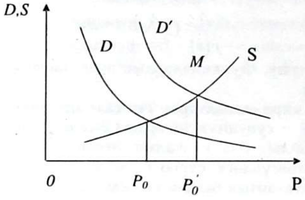
1.5-чийме

(1.2) жана (1.3) формулаларындагы c жана d экзогендик чоңдуктар, алар сырткы себептерден (коомдогу абал, саясий кырдаал, ж.б.) көз каранды болушат. Бул формулалардагы өзгөрүлмөлөр оң гана маанилерди кабыл алышат, ошондуктан функциялардын графиги биринчи чейректе гана көрсөтүлөт.

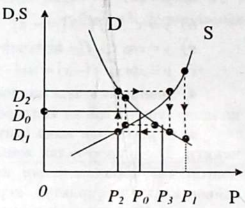
Экономикада тең салмактуулук шарты, б.а. суроо-талап сунушка барабар болгон учур кызыгууну пайда кылат. Бул шарт

$$D(p) = S(p) \qquad (1.4)$$

теңдемеси менен берилет жана D жана S ийри сызыктарынын кесилиш чекитине туура келет. Бул чекит тең *салмактуулук чекити* деп аталат (1.6-чийме). Ал эми (1.4) шарты орун алган P_0 баасы *тең салмактуулук баасы* деп аталат.



1.6-чийме



1.7-чийме

Калктын турмуш абалынын жакшыруусу менен (1.2) формуласындагы c чоңдугу өсөт. Анда D ийри сызыгы жогору көтөрүлүп, тең салмактуулук чекити M оң жакка жайланышат. Мында товардын баасы өзгөрбөгөн S сунуш ийри сызыгы боюнча өсөт.

б) Рыноктогу желе сыяктуу модель. Тең салмактуулук баасын аныктоо маселесин карайлы. Бул өндүрүүчү менен сатып алуучунун ортосундагы сооданы сүрөттөөчү рыноктогу негизги проблемалардын бири болуп саналат(1.7-сүрөт).

Айталы, өндүрүүчү алгач P_1 баасын айтсын. P_1 баасы чындыгында тең салмактуулук баадан жогору (ар бир өндүрүүчү өз өндүрүшүнөн жогору пайда алууну көздөйт). Сатып алуучу D_1 талабын P_1 баасында баалап, бул D_1 талабы сунушка барабар боло тургандай өзүнүн P_2 баасын айтат. Бул P_2 баасы тең салмактуулук баадан төмөн (ар бир сатып алуучу төмөн баада сатып алууга аракеттенет). Өз учурунда өндүрүүчү P_2 баасына тиешелүү D_2 суроо-талабын баалап, өзүнүн P_3 баасын айтат. Бул баа тең салмактуу баадан жогору. Соодалашуу процесси улантылат жана анык бир шарттарда тең салмактуулук баага туруктуу жакындайт.

Эгерде соодалашуу процессиндеги баалар деп аталган сандардын удаалаштыгын карасак, анда бул удаалаштыктын предели болуп

P_0 тең салмактуулук баасы эсептелет: $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$.

§ 2. Функциянын предели

1. Функциянын чекиттеги предели. Айталы, $f(x)$ функциясы кандайдыр бир X көптүгүндө аныкталсын. Бул көптүктөн a чекитине жыйналуучу

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{2.1}$$

чекиттеринин удаалаштыгын алалы. a чекити X ке таандык болушу да, болбой калышы да мүмкүн. Бул удаалаштыктын чекиттерине тиешелүү келүүчү функциянын маанилери

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots \tag{2.2}$$

сандык удаалаштыгын түзүшөт.

Эгерде a жыйналуучу аргументинин каалагандай (2.1) ($x \neq a$) маанилерине тиешелүү келген функциянын маанилеринин (2.2) удаалаштыгы A санына жыйналса, анда A саны $f(x)$ функциясынын *a чекитиндеги (же $x \to a$ дагы) предели* деп аталат жана $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ деп белгиленет.

$f(x_n)$ удаалаштыгы бир гана пределге ээ болгондуктан, $f(x)$ функциясы a чекитинде бир гана пределдик мааниге ээ болот.

Бир нече мисалдарды келтирели.

1-мисал. $f(x) = c$ - const функциясы сан огунун ар бир чекитинде пределге ээ болот. Чындыгында, a чекитине жыйналуучу каалагандай (2.1) удаалаштыгына бир эле c санынан турган (2.2) удаалаштыгы тиешелүү келет. Мындан $n \to \infty$ болгондо $f(x_n) \to c$ келип чыгат.

2-мисал. $f(x) = x$ функциясы сан огунун каалагандай a чекитинде a барабар болгон пределге ээ болот. Чындыгында, аргументтин маанилеринин (2.1) удаалаштыгы жана функциянын маанилеринин (2.2) удаалаштыгы бул учурда теңдеш болушат. Ошондуктан $\{x_n\}$ удаалаштыгы a жыйналса, анда $\{f(x_n)\}$ удаалаштыгы да a га жыйналат.

3-мисал. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2x - 1}$ функциясы $x = 0$ чекитинде -2 пределине ээ болот. Чындыгында, айталы $\{x_n\}$ нөлгө жыйналуучу каалагандай удаалаштык болсун, б.а. $n \to \infty$ да $x_n \to 0$ болсун. Анда сандык удаалаштыктын 1^0-9^0 - касиеттери боюнча төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^{\,2} - 3x_n + 2}{2x_n - 1} = \frac{\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^2 - 3\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) + 2}{2\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) - 1} = -\frac{2}{1} = -2.$$

2. Функциянын бир жактуу пределдери. Эми функциянын бир жактуу пределдери түшүнүгүн киргизели. Төмөндөгүдөй бир жактуу пределдер болушу мүмкүн: аргументтин маанилеринин удаалаштыгы a чекитине сол жактан умтулат (*сол жаккы предели*) же оң жактан умтулат (*оң жаккы предели*), б.а. $x_n < a$ же $x_n > a$. Функциянын оң (сол) жаккы предели $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A\left(\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A\right)$ түрүндө белгиленет.

4-мисал. $y = signx = \begin{cases} 1, \text{ эгерде } x > 0 \\ 0, \text{ эгерде } x = 0 \\ -1, \text{ эгерде } x < 0 \end{cases}$ функциясын карайлы.

$x = 0$ чекитинде бул функция сол жана оң жаккы пределдерге ээ:

$$\lim_{x\to -0} signx = -1; \qquad \lim_{x\to +0} signx = +1.$$

Чындыгында, бардык элементтери $x_n < 0$ ($x_n > 0$) болгон жана нөлгө жыйналуучу каалагандай $\{x_n\}$ удаалаштыгы үчүн тиешелүү функциянын маанилеринин удаалаштыгы жалгыз гана -1 $(+1)$ санынан турат, б.а. $x = 0$ чекитинин сол (оң) жагындагы предели да бул санга барабар болот.

Теорема. $f(x)$ функциясы a чекитинде пределге ээ болот, качан гана функциянын бул чекиттеги оң жана сол жаккы пределдери жашап жана ал пределдер барабар болсо. Бул учурда функциянын предели бир жактуу пределге барабар болот.

3. Функциянын $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$ дагы пределдери.

Функциянын чекиттеги предели түшүнүгүнөн сырткары аргумент чексизге умтулгандагы функциянын предели түшүнүгү жашайт. $x\to\infty$ дагы функциянын пределин $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ деп белгилейбиз.

Айталы, $f(x) = \frac{1}{x}$ болсун. Бул функция $x\to\infty$да 0 пределине ээ болот. Чындыгында, эгерде (2.1) аргументтин маанилеринин чексиз чоң удаалаштыгы болсо, анда ага тиешелүү келүүчү функциянын маанилеринин (2.2) удаалаштыгы $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}, \dots$ көрүнүшүндө болуп, чексиз кичине удаалаштык болот, б.а. удаалаштыктын предели нөлгө барабар же $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ болот. Ушул сыяктуу эле $n > 0$ болгондо, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ экендигин көрсөтүүгө болот.

§ 3. Функциянын предели жөнүндө теоремалар

a чекитинде пределге ээ болуучу функциялардын үстүнөн жүргүзүлүүчү арифметикалык амалдар ошол эле чекитте пределге ээ болуучу функцияларга алып келинет.

1-теорема. Айталы $f(x)$ жана $g(x)$ функцияларынын a чекитинде A жана B пределдерине ээ болушсун. Анда $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, жана $\frac{f(x)}{g(x)}$ функциялары a чекитинде тиешелүү түрдө $A \pm B$, AB жана $\frac{A}{B}$ $(B \neq 0)$ пределдерине ээ.

2-теорема. Айталы $f(x)$, $h(x)$ жана $g(x)$ функциялары a чекитинин кандайдыр бир аймагында (a чекитинин өзүндө да болушу мүмкүн) аныкталып жана $f(x), g(x)$ функциялары бул чекитте A пределине ээ болсун: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = A$. Мындан сырткары $f(x) \le h(x) \le g(x)$ барабарсыздыгы аткарылсын. Анда $\lim\limits_{x \to a} h(x) = A$ орун алат.

Жогорудагы биринчи, экинчи теоремалар $a = \infty$; $a = \pm\infty$ болгон учурда да орун алаарын белгилей кетүү керек.

Көп учурларда функциялардын катышынын предели жөнүндөгү теореманы түздөн-түз пайдаланууга мүмкүн эмес. Мында $\frac{0}{0}$ же $\frac{\infty}{\infty}$ түрүндөгү аныксыздыктарга ээ болобуз. Кийинчерээк бул аныксыздыктарды жоюу үчүн дифференцирлөөнү пайдаланабыз. Бирок бул маселени төмөндөгүдөй жөнөкөй ыкмалардын жардамында чыгарууга болот: бөлчөктүн бөлүмүн жана алымын көбөйтүүчүлөргө ажыратуу; алымын жана бөлүмүн x тин кандайдыр бир даражаларына бөлүү ж.б.

1-мисал. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$ пределин эсептегиле.

$x = 2$ пределдик маанисинде бул функция $\frac{0}{0}$ түрүндөгү аныксыздыкка келет. Берилген бөлчөктүн алымын жана бөлүмүн көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-1}=\frac{2-3}{2-1}=-1 \quad \Diamond$$

2-мисал. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+2}{x+2}$ пределин эсептегиле.

◊ Бул типтеги мисалдарда берилген бөлчөктүн алымын жана бөлүмүн x тин эң чоң даражасына, учурда x ке бөлүү керек.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}}=\frac{3+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}}{1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}}=\frac{3+0}{1+0}=3 \quad \Diamond$$

3-мисал. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x^3+x^2+3}$ пределин эсептегиле.

◊ Мында бөлчөктүн алымын да, бөлүмүн да x^3 ка бөлөбүз.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3}}=\frac{0+0+0}{1+0+0}=0 \quad \Diamond$$

«$\infty-\infty$» түрүндөгү аныксыздыкты жоюуга мисал келтирели.

4-мисал. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$ пределин эсептегиле.

◊ Бул учурда предел алдындагы туюнтманы түйүндөшүнө көбөйтүп жана бөлүп андан кийин пределге өтүү керек.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2-x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=\frac{0}{\sqrt{1+0}+1}=0 \quad \Diamond$$

§4. Сонун пределдер

Бул параграфта математикада жана анын колдонулушунда кеңири таралган эки сонун пределди келтиребиз.

а) Биринчи сонун предел.

Теорема. $x=0$ чекитинде $\dfrac{\sin x}{x}$ функциясынын предели жашайт жана ал бирге барабар болот, б.а.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad (4.1)$$

(4.1) предели *биринчи сонун предел* деп аталат.

□ (4.1) - формуласын далилдөө үчүн борбору O чекити, ал эми радиусу R болгон тегеректи алалы. Айталы OB - Ox огу менен

x $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ бурчун түзүүчү кыймылдуу радиус болсун (4.1-чийме). 4.1-чиймеден AOB үч бурчтугунун аянты AOB секторунун аянтынан кичине, ал эми бул сектордун аянты өз кезегинде AOC тик бурчтуу үч бурчтугунун аянтынан кичине, б.а.

$$S_{\Delta AOB}<S_{сект.AOB}<S_{\Delta AOC} \qquad (4.2)$$

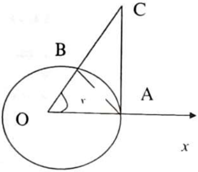
экендиги көрүнүп турат.

Ал эми AOB үч бурчтугунун аянты $S_{\Delta AOB}=\dfrac{1}{2}R\cdot R\cdot \sin x=\dfrac{1}{2}R^2\sin x,$ AOB секторунун аянты $S_{сект.AOB}=\dfrac{1}{2}R^2x$ жана AOC тик бурчтуу үч бурчтугунун аянты $S_{\Delta AOC}=\dfrac{1}{2}AO\cdot AC=\dfrac{1}{2}AO\cdot(AO\cdot tgx)=\dfrac{1}{2}R^2tgx$ болгондуктан, (4.2) барабарсыздыгы боюнча төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$\frac{1}{2}R^2\sin<\frac{1}{2}R^2x<\frac{1}{2}R^2tgx\Rightarrow 1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\Rightarrow \cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

Мында $\cos x$ жана $\dfrac{\sin x}{x}$ функциялары жуп функция болгондуктан, алынган барабарсыздык $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ учур үчүн да орун алат. Акыркы барабарсыздыктан $x\to 0$ да пределге өтсөк

$\lim\limits_{x\to 0}\cos x<\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}<\lim\limits_{x\to 0}1\Rightarrow 1<\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}<1$ же $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ ге ээ болобуз



4.1-чийме

1-мисал. $\dfrac{\sin(ax)}{bx}$ функциясынын $x\to 0$ умтулгандагы пределин тапкыла.

Берилген туюнтманы бөлчөктүн бөлүмүндө $\sin$ тун аргументи боло тургандай кылып өзгөртүп түзөбүз.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}\frac{a}{b}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}\lim_{x\to 0}\frac{a}{b}=$$

$$=1\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b} \qquad \Diamond$$

2-мисал. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ пределин эсептегиле.

◊ $x \to 0$ умтулганда бөлчөктүн бөлүмү нөлгө умтулгандыктан берилген бөлчөктү өзгөртүп түзөбүз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2} \quad ◊$$

3-мисал. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$ пределин эсептегиле.

◊ Жогорку мисалдардай берилген бөлчөктү биринчи сонун пределге келе тургандай кылып өзгөртүп түзөбүз.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\sin 4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\frac{\sin 4x}{4x}16=$$

$$=16\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=16\cdot 1\cdot 1=16 \quad ◊$$

б) Экинчи сонун предел. $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ сандык удаалаштыгын карайлы. Эгерде бул удаалаштыктын мүчөлөрүн эсептесек, $a_1=2{,}0,\ a_2=2{,}25,\ a_3=2{,}37,\ a_4=2{,}441,\ a_5=2{,}488,\dots$ ээ болобуз. Мында $\{a_n\}$ удаалаштыгын өсүүчү деп болжолдоого болот. Чындыгында

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\dots+\frac{n(n-1)\dots(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n},$$

$$a_n=2+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\dots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \qquad (4.3)$$

n чоңойгон сайын оң кошулуучулардын саны жана ар бир кошулуучунун мааниси да чоңойот, б.а. $a_1<a_2<\dots<a_n<\dots$ болот.

Экинчи жактан $\{a_n\}$ удаалаштыгы чектелген болот. Чындыгында

$$a_n<2+\frac{1}{1\cdot 2}+\dots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}+\dots<2+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}},$$

мында, $2+\dfrac{1}{2}+\dots+\dfrac{1}{2^{n-1}}$, суммасы 1- мүчөсү $a_1=\dfrac{1}{2}$ жана бөлүмү $q=\dfrac{1}{2}$ болгон геометриялык прогрессиянын алгачкы $(n-1)$ мүчөсүнүн суммасын берет:

$$S_{n-1}=\frac{a_1\left(q^{n-1}-1\right)}{q-1}=\frac{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1\right)}{\frac{1}{2}-1}=1-\frac{1}{2^{n-1}}<1.$$

$S_{n-1}<1$ болгондуктан, $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+1=3$ болот. Демек, $\{a_n\}$ удаалаштыгы чектүү пределге ээ.

Аныктама.

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (4.4)$$

формуласынан аныкталуучу e саны *экинчи сонун предел* деп аталат.

Эскертүү. Ушул экинчи сонун предел жогору жакта гл. 7. §3тө да каралган.

4-мисал. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ пределин эсептегиле.

◊ Мында $\frac{1}{x}=y$ белгилөөсүн пайдаланабыз. Анда $x\to 0$ умтулганда $y\to\infty$ умтулат, б.а.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=e \quad ◊$$

5-мисал. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ пределин эсептегиле.

◊ $x=2y$ белгилөөсүн пайдаланабыз. Анда $x\to\infty$ умтулганда $y\to\infty$ умтулат, б.а.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y}=\lim_{y\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^2=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=$$

$$=e\cdot e=e^2 \quad ◊$$

6-мисал. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$ пределин эсептегиле.

◊ Алгач предел алдындагы туюнтманы өзгөртүп түзөбүз.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\log_a(1+x)\right]=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=$$

$$= \log_a e = \frac{1}{\ln a} \qquad \diamond$$

§ 5. Чексиз кичине жана чексиз чоң функциялар

1-аныктама. Эгерде $f(x)$ функциясынын $x=a$ чекитиндеги предели нөлгө барабар, б.а. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ болсо, анда $f(x)$ функциясы $x=a$ *чекитинде чексиз кичине функция* деп аталат.

Ушул сыяктуу эле $x\to\infty, x\to\pm\infty, x\to a+0$ жана $x\to a-0$ умтулган учурларда чексиз кичине функцияны аныктоого болот.

Теорема. a чекитинде чексиз кичине болгон чектүү сандагы функциялардын алгебралык суммасы жана көбөйтүндүсү да, ошондой эле a чекитинде чексиз кичине функциянын чектелген функцияга болгон көбөйтүндүсү да a чекитинде чексиз кичине функция болот.

2-аныктама. Эгерде a чекитине жыйналуучу аргументтин маанилеринин $\{x_n\}$ удаалаштыгына тиешелүү келүүчү функциянын маанилеринин $\{f(x_n)\}$ удаалаштыгы чексиз чоң болсо, анда $f(x)$ функциясы a *чекитинде чексиз чоң функция* деп аталат.

Бул учурда $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ ($\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ же $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$) деп жазылат жана $f(x)$ функциясы a чекитинде чексиз ($+\infty$ же $-\infty$) пределге ээ болот деп айтабыз.

Бир жактуу чектүү пределдер сыяктуу эле бир жактуу чексиз пределдерди аныктоого болот:

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to a-0} f(x)=-\infty, \quad \lim_{x\to a-0} f(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to a+0} f(x)=-\infty$$

Ошондой эле $x\to\infty, x\to+\infty$ жана $x\to-\infty$ учурларда чексиз чоң функциянын пределдерин аныктоого болот.

Чексиз кичине жана чексиз чоң функциялардын ортосунда төмөндөгүдөй байланыш бар: эгерде $x\to a$ умтулганда $\alpha(x)$ чексиз кичине функция болсо, анда $f(x)=\dfrac{1}{\alpha(x)}$ чексиз чоң функция жана тескерисинче болот.

§ 6. Функциянын үзгүлтүксүздүк түшүнүгү

Функциянын үзгүлтүксүздүгү түшүнүгү математикалык анализде фундаменталдык түшүнүк болуп саналат. Бул түшүнүктү удаалаштыктар тилинде баяндайлы.

1-аныктама. Эгерде $f(x)$ функциясы төмөнкүдөй шарттарды канааттандырса:

1) a чекитинде аныкталса, б.а. $f(a)$ жашаса;

2) $x \to a$ умтулганда чектүү пределге ээ болсо;

3) бул чектүү предел a чекитиндеги функциянын маанисине барабар, б.а.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad (6.1)$$

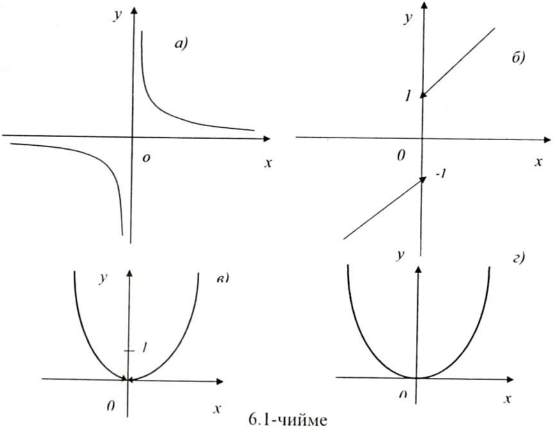
орун алса, анда $f(x)$ функциясы *a чекитинде үзгүлтүксүз* деп аталат.

1-мисал. Төмөндөгү функцияларды $x=0$ чекитинде үзгүлтүксүздүккө изилдегиле.

а) $y = \frac{1}{x}$; б) $y = \begin{cases} x+1, x \geq 0 \\ x-1, x < 0 \end{cases}$;

в) $y = \begin{cases} x^2, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$; г) $y = x^2$.

◊ а) $x=0$ чекитинде $y=f(x)$ функциясы (6.1 – чийме, а) үзгүлтүксүз болбойт. Себеби үзгүлтүксүздүктүн биринчи шарты орун албайт, б.а. $f(0)$ мааниси жашабайт.



6.1-чийме

б) $x=0$ чекитинде $y=f(x)$ функциясы (6.1–чийме, б) үзгүлтүксүз болбойт. Себеби $f(0)=1$ маанисинин жашаганы менен үзгүлтүксүздүктүн экинчи шарты орун албайт, б.а. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ предели жашабайт ($\lim\limits_{x\to -0} f(x)=-1, \lim\limits_{x\to +0} f(x)=1$, бирок $x\to 0$ да жалпы предел жашабайт).

в) $x=0$ чекитинде $y=f(x)$ функциясы (6.1–чийме, в) үзгүлтүксүз болбойт. Себеби үзгүлтүксүздүктүн биринчи эки шарты орун алганы менен, б.а. $f(0)=1$ жана $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ болгону менен үзгүлтүксүздүктүн үчүнчү шарты орун албайт, же $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$ болот.

г) $x=0$ чекитинде $y=f(x)$ функциясы (6.1-чийме, г) үзгүлтүксүз болот. Себеби үзгүлтүксүздүктүн үч шарты тең орун алат, б.а. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$ ◊

$f(x)$ функциясынын a чекитиндеги үзгүлтүксүздүгүнүн аныктамасын

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(\lim_{x\to a} x) \tag{6.2}$$

түрүндө жазууга болот, б.а. үзгүлтүксүз функция үчүн предел жана функция символдордун ордун алмаштырууга болот.

Үзгүлтүксүздүктүн дагы бир аныктамасын беребиз.

x_0 аргументине Δx өсүндүсүн берели. Анда $y=f(x)$ функциясы $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ өсүндүсүн алат.

2-аныктама. Эгерде $y=f(x)$ функциясы a чекитинде аныкталган жана аргументтин чексиз кичине өсүндүсүнө функциянын чексиз кичине өсүндүсү тиешелүү келсе, б.а.

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y=0 \tag{6.3}$$

болсо, анда $y=f(x)$ функциясы a *чекитинде үзгүлтүксүз* деп аталат.

Эгерде $y=f(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болбосо, анда a чекити *үзүлүү чекити* деп аталат.

Функциянын үзүлүү чекиттерин төмөндөгүдөй классификациялоого болот:

1. Жоюлуучу үзүлүү чекиттери.

Эгерде a чекитиндеги $f(x)$ функциясынын предели жашаса, бирок a чекитинде бул функция аныкталбаган же $f(a)$ мааниси бул пределге барабар болбосо, анда a чекити $f(x)$ функциясынын *жоюлуучу үзүлүү чекити* деп аталат.

2-мисал. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ функциясы $x=0$ чекитинде пределге ээ, б.а. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Бирок, $x=0$ чекитинин өзүндө бул функция аныкталбаган. Мында $x=0$ жоюлуучу үзүлүү чекити болот. Себеби, төмөндөгүдөй жаңы функцияны киргизүү менен бул үзүлүү чекитин жоюуга болот:

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

$f_1(x)$ функциясы бардык сан огунда үзгүлтүксүз болот.

2. Биринчи түрдөгү үзүлүү чекиттери.

Эгерде $y=f(x)$ функциясы a чекитинде бири-биринен айырмалуу болгон оң жана сол жактуу чектүү пределдерге ээ болушса, б.а. $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)\neq\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ шарты орун алса, анда a чекити *биринчи түрдөгү үзүлүү чекити* деп аталат.

3-мисал. $f(x)=\operatorname{sign}x=\begin{cases}-1, x<0\\ 0, x=0\\ 1, x>0\end{cases}$ функциясы үчүн $x=0$ чекити биринчи түрдөгү үзүлүү чекити болот.

3. Экинчи түрдөгү үзүлүү чекиттери.

Эгерде $y=f(x)$ функциясынын $x=a$ чекитиндеги бир жактуу пределдеринин жок дегенде бири жашабаса же чексизге барабар болсо, анда a чекити *экинчи түрдөгү үзүлүү чекити* деп аталат.

4-мисал. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ функциясы үчүн $x=0$ чекити экинчи түрдөгү үзүлүү чекити болот. Себеби $\lim\limits_{x\to+0}(1/x)=+\infty$ жана $\lim\limits_{x\to-0}(1/x)=-\infty$.

5-мисал. $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ функциясы үчүн $x=0$ чекити экинчи түрдөгү үзүлүү чекити болот. Анткени, берилген функциянын $x=0$ чекитиндеги оң жана сол жаккы пределдери жашабайт.

6-мисал. $f(x)=e^{1/x}$ функциясы үчүн $x=0$ чекити экинчи түрдөгү үзүлүү чекит. Себеби, $\lim\limits_{x\to-0}\left(e^{1/x}\right)=0$, $\lim\limits_{x\to+0}\left(e^{1/x}\right)=+\infty$.

Чекитте үзгүлтүксүз болгон функциялардын касиеттери.

1°. Эгерде $f(x)$ жана $\varphi(x)$ функциялары a чекитинде үзгүлтүксүз болушса, анда $f(x)+\varphi(x)$, $f(x)\cdot\varphi(x)$ жана $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$,$(\varphi(a)\neq 0)$ функциялары да a чекитинде үзгүлтүксүз болушат.

2°. Эгерде $f(x)$ функциясы a чекитинде үзгүлтүксүз жана $f(a)>0$ болсо, анда a чекитинин кандайдыр бир аймагы табылып, $f(x)>0$ болот.

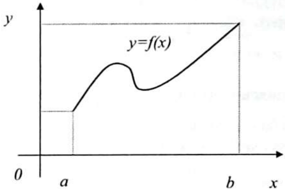
3-аныктама. Эгерде $y=f(x)$ функциясы X аралыгынын бардык чекиттеринде үзгүлтүксүз болушса, анда $y=f(x)$ функциясы X *аралыгында үзгүлтүксүз* деп аталат.

Аралыкта үзгүлтүксүз болгон функциялардын касиеттери.

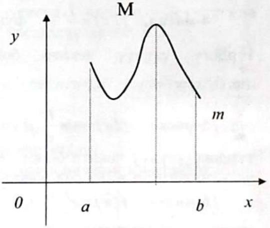
1°. Эгерде $y=f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болсо, анда ал берилген кесиндиде чектелген болот (6.2-чийме).

2°. Эгерде $y=f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болсо, анда ал берилген кесиндиде эң кичине m жана эң чоң M маанилерине ээ болот (*Вейерштрасстын теоремасы* , 6.3-чийме).

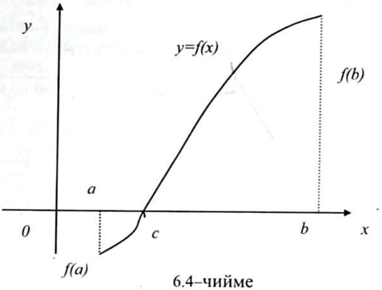
3°. Эгерде $y=f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз жана кесиндинин учтарында карама–каршы белгилердеги $f(a)$ жана $f(b)$ маанилерине ээ болушса, анда бул кесиндиден кандайдыр бир $c\in(a,b)$ чекити табылып, $f(c)=0$ орун алат (*Больцано–Коши теоремасы,* 6.4-чийме) (далилдөөсүн [1,4] адабияттардан табууга болот).



6.2–чийме



6.3–чийме



6.4–чийме

§7. Татаал функция түшүнүгү

Аныктама. Эгерде X аралыгында маанилеринин көптүгү Z болгон $z=\varphi(x)$ функциясы жана Z көптүгүндө $y=f(z)$ функциясы аныкталган болушса, анда $y=f[\varphi(x)]$ функциясы x өзгөрмөсүнөн *татаал функция (же функциялардын суперпозициясы)* деп аталат, ал эми z өзгөрүлмөсү – татаал функциянын аралыктагы өзгөрүлмөсү деп аталат.

Татаал функцияларга мисал келтирели.

1-мисал. $y=\cos\sqrt{1-x}$ – $(-\infty,1]$ жарым интервалында аныкталган татаал функция. Себеби, $y=f(z)=\cos z;\ z=\varphi(x)=\sqrt{1-x}$.

2-мисал. $y=e^{-x^2}$ бүткүл сан огунда аныкталган татаал функция. Анткени, $y=f(z)=e^z; z=\varphi(x)=-x^2$.

3-мисал. $y=\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{3/2}$ бул $(-\infty,0)$ жана $(0,+\infty)$ интервалында аныкталган татаал функция. Анткени, $y=f(z)=z^{3/2},\ z=\varphi(x)=\dfrac{1+x}{x}$.

Теорема. Айталы $z=\varphi(x)$ функциясы x_0 чекитинде, ал эми $y=f(z)$ функциясы $z_0=\varphi(x_0)$ чекитинде үзгүлтүксүз болушсун. Анда $y=f[\varphi(x)]$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болот (далилдөөсү [4,5] адабияттарда).

4-мисал. $y = tg(x^2 + 2x)$ функциясы $x = 0$ чекитинде үзгүлтүксүз болот. Себеби, $z = x^2 + x$ функциясы $x = 0$ чекитинде, ал эми $y = tgz$ функциясы $z = 0$ чекитинде үзгүлтүксүз болушат.

Көнүгүүлөр

Функциялардын аныкталуу областтарын тапкыла.

8.1. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$; 8.2. $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$; 8.3. $y = \dfrac{1}{x^3 - x}$;

8.4. $y = \dfrac{2x}{x^2 - 3x + 2}$; 8.5. $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$; 8.6. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4x}}$;

8.7. $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$; 8.8. $y = \sqrt{2 + x - x^2}$; 8.9. $y = arcsin\left(lg\dfrac{x}{10}\right)$;

8.10. $y = lg(1 - 2cos\,x)$; 8.11. $y = (-1)^x$;

8.12. $y = arccos\dfrac{2x}{1 + x^2}$.

8.13. Эгерде $f(x) = x^2 = x - 2$ болсо, анда $f(0), f(1), f(-3)$ маанилерин тапкыла.

8.14. Эгерде $f(x) = arccos(lg\,x)$ болсо, анда $f(1/10), f(1), f(10)$ маанилерин тапкыла.

Төмөндөгү функциялардын так, жуптугун аныктагыла:

8.15. $f(x) = 3x - x^3$; 8.16. $f(x) = \sqrt[3]{(1 - x)^2} + \sqrt[3]{(1 + x)^2}$;

8.17. $f(x) = ln\dfrac{1 - x}{1 + x}$; 8.18. $f(x) = ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

8.19. Кандайдыр бир товарга болгон суроо-талап жана сунуш $D(P) = a - bP, S(P) = dP + c$ көз карандылыгы менен сүрөттөлөт. Эгерде төмөндөгүдөй параметрлер белгилүү болсо, анда тең салмактуулук бааны аныктагыла:

а) $a = 19, b = 2, c = 3, d = 2$; б) $a = 15, b = 3, c = 1, d = 4$;

в) $a = 11, b = 3, c = 3, d = 1$; г) $a = 23, b = 3, c = 5, d = 6$.

Пределди эсептегиле:

8.20. $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{x^2 + 5}{x^2 - 3}$; 8.21. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{x^3 - 3x + 1}{x - 4} + 1\right)$;

8.22. $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}}\dfrac{x^2 - 3}{x^4 + x^2 + 1}$; 8.23. $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}$;

8.24. $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{1 + x - 3x^3}{1 + x^2 + 3x^3}$; 8.25. $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2 + 1} - x\right)$;

8.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$;

8.27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$;

8.28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$;

8.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

8.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$;

8.31. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$;

8.32. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$;

8.33. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-3}\right)^{2x+1}$;

8.34. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$.

Функциялардын үзүлүү чекиттерин тапкыла жана алардын тибин аныктагыла:

8.35. $y=\dfrac{x}{x+2}$;

8.36. $y=\dfrac{x+1}{x^3+1}$;

8.37. $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$;

8.38. $y=\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}$;

8.39. $y=e^{x+\frac{1}{x}}$;

8.40. $y=\dfrac{1}{\ln x}$.

ТОГУЗУНЧУ ГЛАВА
БИР ӨЗГӨРҮЛМӨЛҮҮ ФУНКЦИЯЛАРДАГЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ЭСЕПТӨӨЛӨР

§ 1. Туунду түшүнүгү

1. Туундунун аныктамасы. Айталы $f(x)$ функциясы кандайдыр бир X аралыгында аныкталсын. $x_0 \in X$ чекитиндеги аргументтин маанисине, $x_0 + \Delta x$ мааниси да X ке таандык боло тургандай кылып, Δx *өсүндүсүн* беребиз. Анда ага тиешелүү $f(x)$ *функциясынын өсүндүсү* $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ке барабар болот.

1-аныктама. $f(x)$ функциясынын x_0 *чекитиндеги туундусу* деп, бул функциянын өсүндүсүнүн аргументтин өсүндүсүнө болгон катышынын $\Delta x \to 0$ умтулгандагы пределин айтабыз.

Функциянын туундусун $y'(x_0)$ жана $f'(x_0)$ түрүндө белгилейбиз. Анда аныктама боюнча төмөндөгү келип чыгат:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (1.1)$$

Эгерде кандайдыр бир x_0 чекитинде (1.1) предели чексизге барабар, б.а. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ же $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$ болсо, анда x_0 чекитиндеги $f(x)$ функциясы *чексиз туундуга* ээ деп айтышат.

Эгерде $f(x)$ функциясы X көптүгүнүн ар бир чекитинде туундуга ээ болсо, $f'(x)$ туундусу да X көптүгүндө аныкталган x аргументтүү функция болот.

2. Туундунун геометриялык мааниси. Туундунун геометриялык маанисин аныктоо үчүн функциянын графигинин берилген чекиттеги жанымасын түшүндүрүү керек болот.

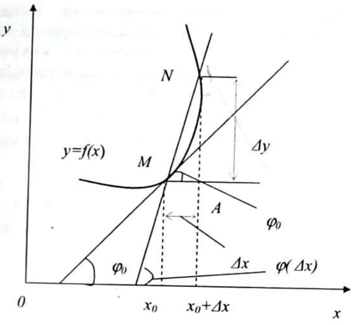
2-аныктама. $y = f(x)$ функциясынын M чекитиндеги *жанымасы* деп, N чекити M чекитине $f(x)$ ийри сызыгы боюнча умтулгандагы MN кесүүчүсүнүн пределдик абалы аталат.

Айталы $f(x)$ ийри сызыгынын M чекити аргументтин x_0 маанисине, ал эми N чекити аргументтин $x_0 + \Delta x$ маанисине тиешелүү келсин (1.1-чийме). Жаныманын аныктамасы боюнча, x_0 чекитинде анын жашашы үчүн бул жаныманын Ox огуна жантаюу бурчуна барабар болгон, $\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(x) = \varphi_0$ предели жашашы зарыл.

MNA үч бурчтугунан

$$tg\varphi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

келип чыгат.



1.1-чийме

Эгерде $f(x)$ функциясынын x_0 чекитиндеги туундусу жашаса, анда (1.1) барабардыгы боюнча

$$tg\varphi_0 = f'(x_0) \qquad (1.2)$$

ээ болобуз. Мындан $f'(x_0)$ туундусу $y = f(x)$ функциясынын графигинин $M(x_0, f(x_0))$ чекитиндеги жанымасынын бурчтук коэффициентине (Ox огунун оң багыты менен түзгөн бурчтун тангенсине) барабар деп жыйынтык чыгарууга болот. Мында жаныманын жантаюу бурчу (1.2) формуласынан аныкталат:

$$\varphi_0 = arctgf'(x_0).$$

3. Туундунун физикалык мааниси. Айталы, $l = f(t)$ функциясы материалдык чекиттин түз сызык боюнча кыймылдоо законун сүрөттөсүн. Анда $\Delta l = f(t + \Delta t) - f(t)$ айырмасы Δt убакыт интервалында өтүлгөн жолдун, ал эми $\dfrac{\Delta l}{\Delta t}$ катышы орточо ылдамдыкты берет. Анда $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta l}{\Delta t} = f'(t)$ предели өтүлгөн жолдон убакыт боюнча алынган туунду катары t убакыт моментиндеги чекиттин *бир калыпта эмес ылдамдыгын* аныктайт.

Анык мааниде $y = f(x)$ функциясынын туундусун функциянын өзгөрүү ылдамдыгы катары түшүндүрүүгө болот: $f'(x)$ канчалык чоң болсо, ийри сызыктын жанымасынын жантаюу бурчу ошончолук чоң болот да, $f(x)$ функциясы тез өсөт.

Функциянын туундусунун геометриялык жана физикалык маанилеринен сырткары төмөндөгүдөй маанилерге да ээ.

а) Микроорганизмдердин популяциялык сандары y менен анын көбөйүү убакыты t нын арасындагы көз карандылык

$$y = P(t)$$

теңдемеси аркылуу берилсе, анда $y' = P'(t)$ туунду t убакыт ичиндеги микроорганизмдердин жашоо аракетинин *өндүрүмдүүлүгү* болот эле. Муну туундунун биологиялык мааниси деп кароого болот.

б) Чыгымдардын x чоңдугу (көлөмү) менен чыгарылуучу продуктылардын y чоңдугун туюнтуучу өндүрүштүк функция

$$y = f(x)$$

түрүндө берилсе, анда $y' = f'(x)$ туунду чыгымдардын x чоңдугундагы продуктулардын көлөмүнүн өзгөрүү ылдамдыгын берет же кыскача *пределдик өндүрүмдүүлүк*, же болбосо *чыгымдын пределдик кайтарып берүүсү* болот.Бул туундунун экономикалык мааниси.

4. Бир жактуу туундулар. Функциянын бир жактуу пределдери сыяктуу эле функциянын чекиттеги оң жана сол жакка туундулар түшүнүгүн киргизели.

3-аныктама. $y = f(x)$ функциясынын x_0 чекитиндеги *оң (сол) жакка туундусу* деп, (1.1) катышынын $\Delta x \to 0$ умтулгандагы оң (сол) жакка пределин айтабыз.

Бир жактуу туундуларды белгилөө үчүн төмөндөгү символдор колдонулат: $f'_+(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, $f'_-(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Эгерде $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде туундуга ээ болсо, анда ал чекиттеги оң жана сол жакка туундулары жашайт жана барабар болот.

Берилген чекитте бири-биринен айырмалуу бир жактуу туундуларга ээ болгон функцияларга мисал келтирели.

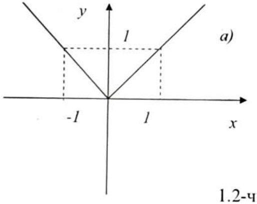
Мисал. $f(x) = |x|$ функциясы $x = 0$ чекитинде $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$ бир жактуу туундуларга ээ. Бирок, $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ болгондуктан, бул функция $x = 0$ чекитинде туундусу жашабайт (1.2-чийме).

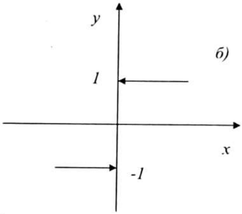
Функциянын туундусун табуу амалын функцияны *дифференцирлөө* деп айтабыз. Ал эми берилген чекитте туундуга ээ болгон функция бул чекитте *дифференцирленүүчү функция* деп аталат.

Функциянын берилген чекиттеги үзгүлтүксүздүгү жана дифференцирленүүчүлүгүнүн ортосундагы байланышты төмөндөгү теорема көрсөтөт.

1-теорема. Эгерде $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде дифференцирленүүчү болсо, анда бул функция x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болот.

Бул теореманын тескериси орун албайт, б.а. $f(x)$ функциясы берилген чекитте үзгүлтүксүз болгону менен бул чекитте туундуга ээ болбой калышы мүмкүн. Буга мисал катары $y=|x|$ функциясын алсак болот. Бул функция $x=0$ чекитинде үзгүлтүксүз, бирок бул чекитте туундусу жашабайт.





1.2-чийме

5. Функциянын графигинин берилген чекитиндеги жанымасынын теңдемеси. Бизге $M(x_0,y_0)$ чекити аркылуу өткөн жана бурчтук коэффициентти k га барабар болгон түз сызыктын теңдемеси $y-y_0=k(x-x_0)$ көрүнүшүндө болоору белгилүү. Айталы $y=f(x)$ функциясы берилсин. Бул функциянын $M(x_0,y_0)$ чекитиндеги туундусу функциянын M чекитиндеги жанымасынын бурчтук коэффициенти болгондуктан, $f(x)$ функциясынын графигинин, ошол чекиттеги *жанымасынын теңдемеси* $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ түрүндө жазылат.

§2. Функциянын дифференциалы

1. Дифференциалдын аныктамасы жана геометриялык мааниси.

1-аныктама. $y=f(x)$ функциясынын x_0 *чекитиндеги дифференциалы* деп, функциянын бул чекиттеги өсүндүсүнүн Δx ке карата негизги сызыктуу бөлүгүн айтабыз, б.а.

$$dy=f'(x_0)\Delta x. \qquad (2.1)$$

Көз каранды эмес x өзгөрүлмөсүнүн dx *дифференциалы* деп, өзгөрүлмөнүн Δx өсүндүсүн айтабыз ($dx = \Delta x$).

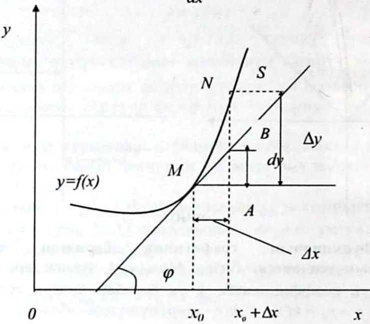
Бул аныктамадан (2.1) формуласы

$$dy = f'(x_0)dx \tag{2.2}$$

көрүнүшүнө келет.

(2.2) барабардыгынан каалагандай x чекитиндеги $f'(x)$ туундусун функциянын dy дифференциалынын көз каранды эмес өзгөрүлмөнүн dx дифференциалына болгон катышы катары аныктоого болоору көрүнүп турат:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$



2.1-чийме

Функциянын дифференциалы төмөндөгүдөй геометриялык мааниге ээ (2.1-чийме). Айталы $y = f(x)$ функциясынын графигиндеги M чекити аргументтин x_0 маанисине тиешелүү, N чекити аргументтин $x_0 + \Delta x$ маанисине тиешелүү келсин. MS - $f(x)$ ийри сызыгынын M чекитиндеги жанымасы, ал эми φ жаныма менен Ox огунун оң багытынын арасындагы бурч болсун. Анда MA аргументтин өсүндүсү, ал эми ага тиешелүү функциянын өсүндүсү AN болот. ABM үч бурчтугунан

$$tg\varphi = \frac{AB}{\Delta x} \Rightarrow AB = \Delta x tg\varphi = f'(x_0)\Delta x = dy$$

келип чыгат, б.а. бул Δx чоңдугуна карата сызыктуу жана функциянын Δy өсүндүсүнө карата негизги бөлүгү. Калган бөлүгү BN кесиндисине тиешелүү келет.

2. Дифференциалдын жардамы менен жакындаштырып эсептөөлөр. Функциянын дифференциалын пайдаланып жакындаштырып эсептөөлөр, функциянын чекиттеги өсүндүсүн анын дифференциалына жакындаштырылган түрдө алмаштырууга негизделген: $\Delta y \approx dy$. Бул жакындаштырылган барабардыкты (2.2) формуласына коюп, төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \qquad (2.3)$$

(2.3) формуласы жакындаштырып эсептөөлөрдөгү негизги формулалардын бири болуп эсептелет.

Мисал. $\sqrt{1,007}$ тамырынын жакындаштырылган маанисин эсептегиле.

◊ $x_0 = 1$ чекитинин аймагында $f(x) = x^{0,5}$ функциясын карайлы. Бул функциянын туундусу $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ болгондуктан (кандайча аныкталарына кийинчерээк токтолобуз), $\Delta x = 0,007$ деп, алып (2.3) формуласынан

$f(1 + 0,007) = \sqrt{1,007} \approx f(1) + f'(1) \cdot 0,007 = 1 + 0,0035 = 1,0035$ ээ болобуз ◊

§3. Туундуну эсептөө схемасы

$y = f(x)$ функциясынын туундусу төмөнкү *схема* боюнча табылат:

1) x аргументине $\Delta x \neq 0$ өсүндүсүн берип, функциянын $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ мааниси эсептелинет.

2) Функциянын $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ өсүндүсү табылат.

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ катышы аныкталат.

4) Бул катыштын $\Delta x \to 0$дагы предели, б.а. $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ табылат.

1-мисал. $y = x^3$ функциясынын туундусун тапкыла.

◊ 1) x аргументине $\Delta x \neq 0$ өсүндүсүн берип, функциянын $y + \Delta y = (x + \Delta x)^3$ маанисин табабыз.

2) Функциянын өсүндүсү Δy ти аныктайбыз:

$$\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3=x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3-x^3=\Delta x(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2)$$

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2$ катышын түзөбүз.

4) $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2)=3x^2$ туундусун табабыз.

Демек, $(x^3)'=3x^2$ ◊

Жалпы учурда каалагандай n үчүн

$$(x^n)'=nx^{n-1} \tag{3.1}$$

формуласын далилдөөгө болот. Мындан $n=\dfrac{1}{2}$ болгон учурда

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{3.2}$$

жана $n=-1$ болгондо

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2} \tag{3.3}$$

келип чыгат.

2-мисал. $y=x^2\sqrt[5]{x^3}$ функциясынын туундусун тапкыла.

◊ Берилген функцияны $y=x^2x^{\frac{3}{5}}=x^{\frac{13}{5}}$ түрүндө жазууга болот. Анда (3.1) формуласы боюнча туундусу $y'=\dfrac{13}{5}x^{\frac{8}{5}}$ барабар болот ◊

3-мисал. $y=\dfrac{1}{x}$ ийри сызыгынын $x=1$ чекитиндеги жанымасынын теңдемесин жазгыла.

◊ $y=f(x)$ функциясынын x_0 чекитиндеги жанымасынын теңдемеси $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ формуласы менен табылары белгилүү. Биздин учурда $y-f(1)=f'(1)(x-1)$. (3.3) формуласы боюнча $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ жана бул туундунун $x=1$ чекитиндеги мааниси $f'(1)=-1$. Ал эми $x=1$ чекитинде функциянын мааниси $f(1)=1$ ге барабар. Анда изделүүчү жаныманын теңдемеси $y-1=-1(x-1)\Rightarrow x+y-2=0$ болот ◊

§4. Дифференцирлөөнүн негизги эрежелери

Дифференцирлөөнүн негизги эрежелерин санап өтөлү:

1. Турактуу сандын туундусу нөлгө барабар, б.а. $c'=0$. Бул эреже ар дайым орун алат, себеби каалагандай турактуу $y=c$ функциясынын өсүндүсү нөлгө барабар болот.

2. Аргументтин туундусу бирге барабар, б.а. $x'=1$. Бул эреже (3.1) формуласынан $n=1$ болгондо келип чыгат.

Айталы $u=u(x)$ жана $v=v(x)$ дифференциленүүчү функциялар болсун.

3. Чектүү сандагы дифференцирленүүчү функциялардын алгебралык суммасынын туундусу бул функциялардын туундуларынын алгебралык суммасына барабар, б.а.

$$(u+v)'=u'+v'. \tag{4.1}$$

4. Дифференцирленүүчү эки функциянын көбөйтүндүсүнүн туундусу биринчи көбөйтүүчүнүн туундусуна экинчисин көбөйтүп, ага экинчи көбөйтүүчүнүн туундусун биринчисине көбөйтүп суммалаганга барабар, б.а.

$$(uv)'=u'v+uv'. \tag{4.2}$$

1-натыйжа. Турактуу көбөйтүүчүнүн туунду белгисинин алдына чыгарууга болот, б.а.

$$(cu)'=cu'. \tag{4.3}$$

2-натыйжа. Дифференцирленүүчү бир нече функциялардын көбөйтүндүлөрүнүн туундусу ар бир көбөйтүүчүнүн туундусун калган көбөйтүүчүлөргө көбөйтүп суммалаганга барабар болот, мисалы

$$(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'. \tag{4.4}$$

5. Эки дифференцирленүүчү функциянын тийиндисинин туундусу

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}, v\neq 0 \tag{4.5}$$

формуласы менен табылат.

Бул эрежелердин ичинен 4-эрежени, б.а. (4.2) формуласын далилдейли.

□ Айталы $u=u(x)$ жана $v=v(x)$ дифференцирленүүчү функциялар болушсун. Жогоруда келтирилген схеманы пайдаланып, $y=uv$ функциясынын туундусун табалы.

1) x аргументине $\Delta x\neq 0$ өсүндүсүн берели. Анда u жана v функциялары $u+\Delta u$ жана $v+\Delta v$ маанилерине, ал эми y функциясы $y+\Delta y$ маанисине ээ болот.

2) Функциянын өсүндүсүн табабыз:

$$\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv=uv+u\Delta v+\Delta uv+\Delta u\Delta v-uv=u\Delta v+\Delta uv+\Delta u\Delta v.$$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ катышын түзөлү: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}v+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta x.$

4) Бул катыштан $\Delta x\to 0$ да пределге өтөлү:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x.$$

Туундунун аныктамасынын негизинде $y'=u'v+uv'+u'v'\cdot 0=u'v+uv'$ ке ээ болдук □

Мисал. Функциялардын туундуларын жана алардын $x=4$ чекитиндеги маанилерин тапкыла:

а) $y=x^3(\sqrt{x}+1)$; б) $y=10(x^6+2)$; в) $y=\frac{x^4-1}{\sqrt{x}}$.

◊ а) (4.1), (4.2) жана (3.1) формулалары боюнча төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$y'=(x^3(\sqrt{x}+1))'=(x^3)'(\sqrt{x}+1)+x^3(\sqrt{x}+1)'=3x^2(\sqrt{x}+1)+$$

$$+x^3\left(\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'+1'\right)=3x^2(\sqrt{x}+1)+x^3\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+0\right)=3x^2(\sqrt{x}+1)+\frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}}.$$

Туундунун $x=4$ чекитиндеги мааниси

$$y'(4)=3\cdot 4^2(\sqrt{4}+1)+\frac{1}{2}\sqrt{4^5}=144+16=160.$$

б)

$$y'=(10(x^6+2))'=10(x^6+2)'=10((x^6)'+2')=10(6x^5+0)=60x^5;$$

$$y'(4)=60x^5=60\cdot 4^5=61440.$$

в) $$y'=\left(\frac{x^4-1}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{(x^4-1)'\sqrt{x}-(x^4-1)(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2}=\frac{4x^3\cdot\sqrt{x}-\frac{x^4-1}{2\sqrt{x}}}{x}=$$

$$=\frac{8x^4-x^4+1}{2x\cdot\sqrt{x}}=\frac{7x^4+1}{2x\sqrt{x}};\ y'(4)=\frac{7\cdot 4^4+1}{2\cdot 4\sqrt{4}}=\frac{1793}{16}\ ◊$$

§5. Татаал жана тескери функциялардын туундулары

1-теорема. Айталы $x=\varphi(t)$ функциясы t_0 чекитинде, ал эми $y=f(x)$ функциясы $x_0=\varphi(t_0)$ чекитинде туундуга ээ болушсун. Анда $y=f[\varphi(t)]$ татаал функциясы t_0 чекитинде туундуга ээ болот жана төмөнкү формула орун алат:

$$y'(t_0)=\frac{dy}{dt}\Big|_{t=t_0}=f'(x_0)\varphi'(t_0). \tag{5.1}$$

Эгерде $y=y(x), x=\varphi(\mu), \mu=\psi(t)$ болсо, анда $y'(t)$ туундусу

$$y'(t)=y'(x)\varphi'(\mu)\psi'(t)$$

формуласы менен эсептелинет.

Татаал функциялардын туундуларын табууга мисалдар келтирели.

1-мисал. $y=tg(x^3)$ функциясынын туундусун тапкыла.

◊ Бул функцияны $y=tg\mu; \mu=x^3$ түрүндө жазууга болот. Анда (5.1) формуласы боюнча

$$y'(x)=y'(\mu)\mu'(x)=\frac{1}{cos^2\mu}\cdot 3x^2=\frac{3x^2}{cos^2 x^3} \quad ◊$$

2-мисал. $y=e^{tg^2 4x}$ функциясынын туундусун тапкыла.

◊ Бул функцияны $y=e^{\mu}, \mu=\vartheta^2, \vartheta=tg\varpi, \varpi=4x$ түрүндө көрсөтүүгө болот. Татаал функцияны дифференцирлөөнүн (5.1) формуласын пайдалансак,

$$y'(x)=y'(\mu)\mu'(\vartheta)\vartheta'(\varpi)\varpi'(x)=e^{\mu}\cdot 2\vartheta\cdot\frac{1}{\cos^2\varpi}\cdot 4=e^{tg^2 4x}\cdot 2tg4x\times$$

$$\times\frac{1}{\cos^2 4x}\cdot 4=\frac{8tg4x}{\cos^2 4x}e^{tg^2 4x} \quad ◊$$

3-мисал. $y=e^{-\sin 3x}+tg4x$ функциясынын $x=0$ чекитиндеги туундусун тапкыла.

◊ $y=e^{\mu}+tg\alpha, \mu=-\varpi, \varpi=\sin z, z=3x, \alpha=4x$ деп белгилесек,

$$y'(x)=e^{\mu}\mu'(\varpi)\varpi'(z)z'(x)+\frac{1}{\cos^2\alpha}\alpha'(x)=e^{\mu}(-1)\cdot\cos z\cdot 3+\frac{4}{\cos^2\alpha}=$$

$$=-3e^{-\sin 3x}\cdot\cos 3x+\frac{4}{\cos^2 4x}, y'(0)=-3e^{-\sin 3\,0}\cdot\cos 3\cdot 0+\frac{4}{\cos^2 4\cdot 0}=1 \quad ◊$$

Тескери функциянын туундусун карайлы.

Айталы $y=f(x)$ кандайдыр бир X аралыгында дифференцирленүүчү функция болсун. Эгерде y өзгөрүлмөсүн аргумент катары, ал эми x өзгөрүлмөсүн функция катары карасак, анда жаңы алынган $x=\varphi(y)$ функциясы берилген функцияга карата тескери функция болот жана анын Y аралыгында үзгүлтүксүз экендигин көрсөтүүгө болот.

2-теорема. Нөлдөн айырмалуу туундуга ээ болгон дифференцирленүүчү функцияга тескери функциянын туундусу берилген функциянын туундусуна тескери чоңдук болот, б.а.

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} \tag{5.2}$$

барабардыгы орун алат.

□ Шарт боюнча $y = f(x)$ дифференцирленүүчү жана $y'(x) = f'(x) \neq 0$. Айталы y көз каранды эмес өзгөрүлмөсүнүн өсүндүсү $\Delta y \neq 0$, ал эми ага тиешелүү келүүчү $x = \varphi(y)$ тескери функциясынын өсүндүсү Δx болсун. Анда $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\Delta y / \Delta x}$ барабардыгы орун алат. Тескери функциянын үзгүлтүксүздүгүнөн $\Delta x \to 0$ экендигин эске алуу менен, $\Delta y \to 0$ да пределге өтсөк $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\Delta y / \Delta x}$, (5.2) б.а. барабардыгы келип чыгат. □

§6. Негизги элементардык функциялардын туундулары

Негизги элементардык функциялардын туундуларын табуунун формулаларын далилдейли.

1. Логарифмалык функциянын туундусу. а) $y = \ln x$ функциясы. Туундуну табуу схемасынан пайдаланалы.

1) $y + \Delta y = \ln(x + \Delta x)$.

2) $\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln \dfrac{x + \Delta x}{x} = \ln\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)$.

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)$.

4) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)$. $\dfrac{\Delta x}{x} = t$ деп белгилейбиз.

Мындан $\Delta x = xt$ жана $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{xt} \ln(1 + t) = \dfrac{1}{x} \lim\limits_{t \to 0} \ln(1 + t)^{\frac{1}{t}}$ келип чыгат.

Логарифмалык функциянын үзгүлтүксүздүгүн пайдаланып, предел жана логарифманын ордун алмаштырабыз.

$$y' = \frac{1}{x} \ln\left[\lim_{t \to 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}}\right] = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}.$$

Демек,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \text{жана} \quad (\ln \mu)' = \frac{1}{\mu} \cdot \mu', \ \mu = \mu(x). \tag{6.1}$$

б) $y = \log_a x$, $y' = (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x\ln a}$, б.а.

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a} \quad \text{жана} \quad (\log_a \mu)' = \frac{1}{\mu \ln a}\cdot \mu', \mu = \mu(x). \quad (6.2)$$

2. Көрсөткүчтүү функциянын туундусу. а) $y = e^x$ функциясы. Бул барабардыктын эки жагын тең e негизи боюнча логарифмалайбыз: $\ln y = \ln e^x$, мындан $\ln y = x$. Эки жагын тең x боюнча дифференцирлейбиз (мында $\ln y$ татаал функция экендигин эске алуу керек): $(\ln y)' = x' \Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 \Rightarrow y' = y$, б.а.

$$(e^x)' = e^x \text{ жана } (e^\mu)' = e^\mu \mu', \mu = \mu(x). \quad (6.3)$$

б) $y = a^x$ функциясы.

$y' = (a^x)' = \left[(e^{\ln a})^x\right] = \left(e^{x\ln a}\right)'$ жана татаал функцияны дифференцирлөө эрежеси боюнча $y' = e^{x\ln a}(x\ln a)' = a^x \ln a$. Демек,

$$(a^x)' = a^x \ln a \text{ жана } (a^\mu)' = a^\mu \ln a \cdot \mu', \mu = \mu(x). \quad (6.4)$$

3. Даражалуу функциянын туундусу. Каалагандай n үчүн $y = x^n$ функциясынын туундусун табуу формуласын карайлы. e негизи боюнча логарифмалап жана алынган $\ln y = \ln x^n = n\ln x$ барабардыгынын эки жагын тең дифференцирлеп, төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$\frac{1}{y}y' = n\frac{1}{x}x' \Rightarrow y' = ny\cdot\frac{1}{x} = nx^n\cdot\frac{1}{x} = nx^{n-1}, \text{ б.а.}$$

$$(x^n)' = nx^{n-1} \text{ жана } (\mu^n)' = n\mu^{n-1}\mu', \mu = \mu(x). \quad (6.5)$$

4. Даражалуу - көрсөткүчтүү функциянын туундусу.

$y = f(x)^{\varphi(x)}$ функциясынын туундусун табалы. e негизи боюнча логарифмалап $\ln y = \ln f(x)^{\varphi(x)} = \varphi(x)\ln f(x)$ алабыз. Бул барабардыктын эки жагын тең дифференцирлейбиз: $y'\cdot\frac{1}{y} = \varphi'(x)\ln f(x) + \varphi(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$. Биз $y = f(x)^{\varphi(x)}$ экендигин эске алып, өзгөртүп түзүүлөрдөн кийин төмөндөгүгө ээ болобуз.

$$y' = \varphi(x)f(x)^{\varphi(x)-1}\cdot f'(x) + f(x)^{\varphi(x)}\ln f(x)\cdot\varphi'(x), \quad (6.6)$$

б.а. даражалуу-көрсөткүчтүү функциянын туундусун табуу үчүн, алгач аны даражалуу функция катары дифференцирлеп, андан кийин көрсөткүчтүү функция катары дифференцирлеп, алынган жыйынтыктарды кошуу керек.

Эскертүү. Логарифмалык функциянын $(ln\,y)' = \dfrac{y'}{y}$ туундусу *логарифмалык туунду* деп аталат. Логарифмалоодо жөнөкөйлөнүүчү туюнтмалардын туундусун табууда аны колдонуу ыңгайлуу. Бул туунду функциянын *өзгөрүүсүнүн салыштырмалуу ылдамдыгы* деп аташат.

1-мисал. Төмөнкү функциялардын туундусун тапкыла:

а) $y = x^x$; б) $y = \sqrt{\dfrac{(x+1)(x^2-2)}{3-x}}$.

◊ а) (6.6) формуласы боюнча:

$$y' = xx^{x-1} + x^x \ln x = x^x(1 + \ln x).$$

б) Бул функциянын туундусун дифференцирлөө эрежелерин пайдаланып табууга болот. Бирок бул туундуну логарифмалык туундунун жардамында табуу ыңгайлуу. Чындыгында,

$$\ln y = \ln\sqrt{\frac{(x+1)(x^2-2)}{3-x}} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{2}\left[\ln(x+1) + \ln(x^2-2) - \ln(3-x)\right].$$

Акыркы барабардыктын эки жагын тең дифференцирлеп, төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+1}(x+1)' + \frac{1}{x^2-2}(x^2-2)' - \frac{1}{3-x}(3-x)'\right]$$

же $y' = \dfrac{1}{2}y\left[\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2x}{x^2-2} + \dfrac{1}{3-x}\right]$.

y тин ордуна берилген функцияны койсок,

$$y' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x+1)(x^2-2)}{3-x}}\cdot\frac{-2(x^3-4x^2-3x+4)}{(x+1)(x^2-2)(3-x)} = -\frac{x^3-4x^2-3x+4}{(3-x)\sqrt{(x+1)(x^2-2)(3-x)}}$$ ◊

5. Тригонометриялык функциялардын туундулары.

а) $y = \sin x$.

Туундуну табуу схемасын пайдаланабыз.

1) $y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$.

2) $\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$.

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$.

4) $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$.

Демек,

$$(\sin x)' = \cos x \text{ жана } (\sin \mu)' = \cos \mu \cdot \mu', \mu = \mu(x). \qquad (6.7)$$

б) $y = \cos x$ функциясынын туундусу төмөнкү формуладан табылат:

$$(\cos x)' = -\sin x \text{ жана } (\cos \mu)' = -\sin \mu \cdot \mu', \mu = \mu(x). \qquad (6.8)$$

в) $y = tgx$.

$$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

б.а.

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ жана } (tg\mu)' = \frac{1}{\cos^2 \mu}\mu', \mu = \mu(x). \qquad (6.9)$$

г) $y = ctgx$.

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \text{ жана } (ctg\mu)' = -\frac{1}{\sin^2 \mu}\mu', \mu = \mu(x). \quad (6.10)$$

Бул в) дагыдай эле далилденет.

д) $y = \arcsin x$, мында $-1 \le x \le 1$ жана $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. Бул функцияга тескери функция $x = \sin y$ көрүнүшүндө жана эгерде $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ болсо, туундусу $x'_y = \cos y \ne 0$ болот. Тескери функцияны дифференцирлөө эрежесин пайдаланабыз:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$x = \pm 1$ болгондо бул туунду жашабайт. Демек,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ (\arcsin \mu)' = \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}\mu', \mu = \mu(x). \qquad (6.11)$$

е) $y = \arccos x, y = arctgx, y = arcctgx$ функцияларынын туундуларын жогорудагы сыяктуу эле далилдөөгө болот. Эми туундулардын таблицасын түзөлү:

№.	y функциясы	y' туундусу	№.	y функциясы	y' туундусу
1.	$u+v$	$u'+v'$	12.	a^{μ}	$a^{\mu}\ln a\mu'$
2.	$u\cdot v$	$u'v+uv'$	13.	$\ln\mu$	$\frac{1}{\mu}\mu'$
3.	$u\cdot v\cdot w$	$u'vw+uv'w+$ $+uvw'$	14.	$\log_a\mu$	$\frac{1}{\mu\ln a}\mu'$
4..	$c\cdot u$	$c\cdot u'$	15.	$\sin\mu$	$\cos\mu\cdot\mu'$
5.	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	16.	$\cos\mu$	$-\sin\mu\cdot\mu'$
6.	$\frac{u}{c}$	$\frac{u'}{c}$	17.	$tg\mu$	$\frac{1}{\cos^2\mu}\mu'$
7.	$\frac{c}{v}$	$-\frac{c}{v^2}$	18.	$ctg\mu$	$-\frac{1}{\sin^2\mu}\mu'$
8.	$f(\mu),\mu=\varphi(x)$	$f'(\mu)\cdot\mu'$	19.	$\arcsin\mu$	$\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}\mu'$
9.	μ^n	$n\mu^{n-1}\mu'$	20.	$\arccos\mu$	$-\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}\mu'$
10.	$\sqrt{\mu}$	$\frac{1}{2\sqrt{\mu}}\mu'$	21.	$arctg\mu$	$\frac{1}{1+\mu^2}\mu'$
11.	$\frac{1}{\mu}$	$-\frac{1}{\mu^2}\mu'$	22.	$arcctg\mu$	$-\frac{1}{1+\mu^2}\mu'$

§7. Жогорку тартиптеги туундулар жөнүндө түшүнүк

$f(x)$ функциясынын $f'(x)$ туундусу да x аргументине карата функция болуп эсептелет, ошондуктан бул $f'(x)$ функциясына да туунду түшүнүгүн колдонууга болот. Кандайдыр бир $y=f(x)$ функциясынын биринчи тартиптеги туундусу $f'(x)$ функциясынан алынган туунду, $(f'(x))'$ функциясынын *экинчи туундусу же экинчи тартиптеги туундусу* деп аталат. Экинчи туундудан алынган туунду *үчүнчү туундусу же үчүнчү тартиптеги туунду* деп аталат. Бул процессти каалагандай улантууга болот. Экинчи тартиптеги туундудан кийинки туундуларды *жогорку тартиптеги туундулар* деп аташат. Жогорку тартиптеги туундуларды $y'', y''', y^{(4)}, ..., y^{(n)}$ же

$f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ түрүндө белгилейбиз.

Жогорку тартиптеги туундуларды эсептөөгө бир нече мисалдарды келтирели.

1-мисал. $y = x^3 + 2x + 1$ функциясынын экинчи тартиптеги туундусун тапкыла.

◊ Удаалаш түрдө биринчи жана экинчи туундуларды табабыз:

$$y' = (x^3 + 2x + 1)' = (x^3)' + (2x)' + 1' = 3x^2 + 2;$$

$$y'' = (y')' = (3x^2 + 2)' = (3x^2)' + 2' = 6x \quad ◊$$

2-мисал. $y = e^{-x^2}$ функциясынын экинчи тартиптеги туундусун тапкыла.

◊ Алгач татаал функциядан биринчи тартиптеги туунду алабыз:

$$(y)' = \left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2}(-x^2)' = -2xe^{-x^2}.$$

Алынган туундудан дагы бир жолу туунду алабыз:

$$y'' = (y')' = \left(-2xe^{-x^2}\right)' = -2\left(x'e^{-x^2} + x(e^{-x^2})'\right) = -2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}(-x^2)' =$$

$$= -2e^{-x^2}(1 - 2x^2) \quad ◊$$

3-мисал. $y = x\ln x$ функциясынын үчүнчү тартиптеги туундусун тапкыла.

◊ $y' = (x\ln x)' = x'\ln x + x(\ln x)' = \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1;$

$$y'' = (y')' = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x};$$

$$y''' = (y'')' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad ◊$$

4-мисал. $y = e^{2x}$ функциясынын n- тартиптеги туундусун тапкыла.

◊ $y' = e^{2x}(2x)' = 2e^{2x};\ y'' = 2^2e^{2x};\ y''' = 2^3e^{2x}$. Демек, ар бир дифференцирлөөдө баштапкы функция экиге эселенет. Анда

$$y^{(n)} = 2^n e^{2x} \quad ◊$$

$\cos x$ жана $\sin x$ функциялары үчүн n- тартиптеги туундулар $\sin^{(n)} x = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right);\ \cos^{(n)} x = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$ формулалары менен табылат.

Көнүгүүлөр

Төмөндөгү функциялардын туундуларын тапкыла.

9.1. $y=3x^2-5x+1$; 9.2. $y=x^4-\frac{1}{3}x^3+2{,}5x^2-0{,}3x+1$;

9.3. $y=\sqrt{x}+1$; 9.4. $y=(x-0{,}5)^2$;

9.5. $y=(x^2-3x+3)(x^2+2x+1)$; 9.6. $y=(x^3-3x+2)(x^4+x^2-1)$;

9.7. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$; 9.8. $y=\dfrac{2}{x^3-1}$;

9.9. $y=\dfrac{x^2+x-1}{x^3+1}$.

9.10. Эгерде $f(x)=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{3}{x^2+1}$ болсо, анда $f'(0), f'(-1)$ ди тапкыла.

9.11. Эгерде $f(x)=(1+x^3)\left(5-\dfrac{1}{x^2}\right)$ болсо, анда $f'(0), f'(1)$ ди тапкыла.

9.12. Эгерде $f(x)=3x-2\sqrt{x}$ болсо, анда $f(1), f'(1), f(4), f'(4), f(a^2), f'(a^2)$ ны тапкыла.

9.13. $y=\dfrac{x}{\sin x+\cos x}$; 9.14. $y=\cos x-\frac{1}{3}\cos^2 x$;

9.15. $y=\sqrt{tg\dfrac{x}{2}}$; 9.16. $y=\frac{1}{3}tg^3 x-tgx+x$;

9.16. $y=\sqrt{x}arctgx$; 9.18. $y=\dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$;

9.19. $y=\dfrac{\arccos x}{x}$; 9.20. $y=arctg^2\dfrac{1}{x}$;

9.21. $y=x\lg x$; 9.22. $y=\ln^2 x$;

9.23. $y=x\sin x\ln x$; 9.24. $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$;

9.25. $y=e^{-x^2}\ln x$; 9.26. $y=10^{xtgx}$;

9.27. $y=e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$; 9.28. $y=x\cdot 10^{\sqrt{x}}$.

Төмөндөгү функциялардын берилген чекиттеги жанымасынын теңдемесин жазгыла:

9.29. $y=x^2, M(1;1)$; 9.30. $y=\ln x, M(1;0)$.

9.31. Дифференциалдарды пайдаланып, жакындаштырылган маанилерди эсептегиле:

а) $\sqrt{101}$; б) $\sqrt{48}$; в) $\sqrt[3]{9}$; г) $\sqrt[5]{33}$.

Төмөндөгү функциялардын экинчи тартиптеги туундуларын тапкыла:

9.32. $y = xe^{x^2}$; 9.33. $y = \dfrac{1}{1+x^3}$; 9.34. $y = \sin^2 x$; 9.35. $y = x^x$.

Төмөндөгү функциялардын үчүнчү тартиптеги туундуларын тапкыла:

9.36. $y = 1 - x^2 - x^4$; 9.37. $y = \cos^2 x$; 9.38. $y = e^x \sin x$; 9.39. $y = x \ln x$.

Төмөндөгү функциялардын n-тартиптеги туундуларын тапкыла:

9.40. $y = e^{ax}$; 9.41. $y = e^{-x}$; 9.42. $y = \sin^2 x$; 9.43. $y = xe^x$;
9.44. $y = \ln(ax+b)$; 9.45. $y = \log_a x$.

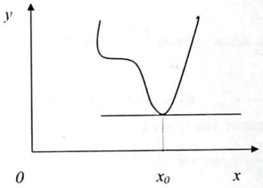
ОНУНЧУ ГЛАВА
ТУУНДУНУН КОЛДОНУЛУШТАРЫ

Функцияларды изилдөөдөгү жана алардын графиктерин түзүүдөгү туундунун колдонулушун кароодон мурда бир нече негизги теоремаларды карайлы.

§1. Дифференциалдык эсептөөлөрдөгү негизги теоремалар

Ферманын теоремасы. Эгерде X аралыгында дифференцирленүүчү $f(x)$ функциясы бул аралыктын кандайдыр бир ички x_0 чекитинде эң чоң же эң кичине мааниге ээ болсо, анда бул чекиттеги функциянын туундусу нөлгө барабар, б.а. $f'(x_0)=0$ болот.

□ Айталы $y=f(x)$ функциясы X аралыгында дифференцирленүүчү жана $x_0 \in X$ чекитинде эң кичине мааниге ээ болсун (1.1-чийме).



1.1- чийме

Эгерде $x_0+\Delta x \in X$ болсо, анда $f(x_0+\Delta x) \geq f(x_0)$ жана жетишээрлик кичине Δx тер үчүн $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \geq 0$ болот. Мындан $\Delta x > 0$ болгондо $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$, ал эми $\Delta x < 0$ болгондо $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$ келип чыгат. $\Delta x \to +0$ жана $\Delta x \to -0$ пределге өтүп, $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$, $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$ ээ болобуз.

Шарт боюнча $y=f(x)$ функциясы x_0 чекитинде дифференцирленүүчү болгондуктан, бул функциянын $\Delta x \to 0$ дагы предели $\Delta x \to 0$ го умтулуу жолунан (оң же сол) көз каранды болбош керек, б.а. $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, мындан $f'(x)=0$ экендиги келип чыгат. Ушул сыяктуу эле $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде эң чоң маанини кабыл алган учурун далилдөөгө болот □

Ферманын теоремасынын геометриялык мааниси: *функция эң чоң же эң кичине мааниге ээ болгон X аралыгынын ички чекитиндеги функциянын графигинин жанымасы абсцисса огуна жарыш болот.*

Роллдун теоремасы. Айталы $y = f(x)$ функциясы төмөндөгүдөй шарттарды канааттандырсын:

1) $[a,b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз;

2) (a,b) интервалында дифференцирленүүчү;

3) кесиндинин учтарында бирдей маанилерди кабыл алсын, б.а. $f(a) = f(b)$ болсун.

Анда бул кесиндиде жок дегенде бир $c \in (a,b)$ чекити табылып, функциянын ушул чекиттеги туундусу нөлгө барабар, б.а. $f'(c) = 0$ болот.

□ Эгерде функция кесиндиде үзгүлтүксүз болсо, анда бул кесиндиде функция өзүнүн эң чоң M жана эң кичине m маанилерине ээ болорун билебиз. Эгерде функция бул эки мааниге тең кесиндинин учтарында ээ болсо, анда шарт боюнча алар барабар, б.а. $m = M$. Бул болсо функция $[a,b]$ кесиндисинде турактуу дегенди билдирет. Анда бул кесиндинин бардык чекиттериндеги туунду нөлгө барабар болот да, теорема далилденет. Эгерде эң чоң жана эң кичине маанилеринин жок дегенде бирине функция кесиндинин ички чекиттеринде ээ болсо, б.а. $m < M$ болсо, анда жогорку Ферманын теоремасы боюнча тиешелүү келүүчү туунду нөлгө барабар болот □

Роллдун теоремасынын геометриялык мааниси: *функциянын графигинин жанымасы абсцисса огуна жарыш боло тургандай жок дегенде бир чекит табылат жана ушул чекиттеги функциянын туундусу нөлгө барабар болот.*(1.2 – чиймеде мындай чекиттер экөө: *c* жана *d* экендиги көрүнүп турат).

Лагранждын теоремасы. Айталы $y = f(x)$ функциясы төмөндөгү шарттарды канаатандырсын:

1) $[a,b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз;

2) (a,b) интервалында дифференцирленүүчү.

Анда бул кесиндиден жок дегенде бир $c \in (a,b)$ чекити табылып, ушул чекиттеги функциянын туундусу кесиндидеги функциянын өсүндүсүнүн аргументинин өсүндүсүнө болгон катышына барабар болот, б.а.

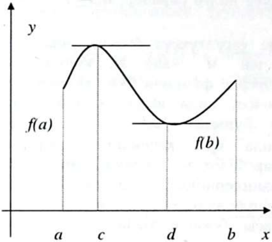
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{1.1}$$

□ Төмөндөгүдөй жаңы $g(x)$ функциясын киргизели:

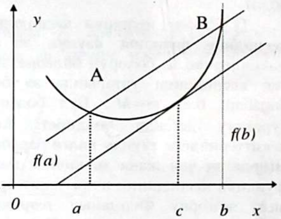
$g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Ушул $g(x)$ функциясы Роллдун теоремасынын шарттарын канаатандырат: $[a,b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз, ал эми (a,b) интервалында дифференцирленүүчү жана анын учтарында барабар маанилерди кабыл алат: $g(a)=g(b)$,

$$g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=f(a).$$

Анда кандайдыр бир $c\in(a,b)$ чекити табылып, $g'(c)=0$ же $g'(c)=f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$ болот. Мындан $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ келип чыгат. □



1.2-чийме



1.3-чийме

Лагранждын теоремасынын жыйынтыгын

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \tag{1.2}$$

түрүндө да жазууга болот. Мында $c=a+\theta(b-a), \theta\in(0,1)$.

Бул теореманын механикалык жана геометриялык маанисин аныктайлы.

$f(b)-f(a)$ өсүндүсү - $f(x)$ функциясынын $[a,b]$ кесиндисиндеги *өзгөрүүсү*, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ - функциянын *өзгөрүүсүнүн орточо ылдамдыгы*, ал эми туундунун чекиттеги мааниси функциянын өзгөрүүсүнүн *бир калыпта эмес* ылдамдыгы. Демек, теоремадан төмөндөгү келип чыгат: кесиндинин жок дегенде бир ички чекити табылып, бул чекиттеги функциянын өзгөрүү ылдамдыгы берилген кесиндидеги функциянын өзгөрүүсүнүн орточо ылдамдыгына барабар болот.

Лагранждын теоремасынын геометриялык мааниси 1.3-чиймеде келтирилген. Эгерде AB түз сызыгын баштапкы абалына карай жарыш жылдырсак, анда жок дегенде бир $c \in (a,b)$ чекити табылып, бул чекиттеги $f(x)$ функциясынын жанымасы жана AB жаасынын учтары аркылуу өткөн AB хордасына жарыш болушат.

Бул теоремадан төмөндөгүдөй натыйжа келип чыгат.

Натыйжа. Эгерде $f(x)$ функциясынын туундусу кандайдыр бир X аралыгында нөлгө барабар болсо, анда бул аралыкта функция турактуу болот.

§2. Лопиталдын эрежеси

Лопиталдын эрежесинин түрдүү аныксыздыктарды ачуудагы колдонулушун карайлы.

а) Эгерде $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ болсо, анда $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ функциясынын $x \to x_0$ дагы предели $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ түрүндөгү аныксыздыкты берет. Бул аныксыздыктарды ачуу үчүн Лопиталдын эрежеси пайдаланылат.

Теорема. Эки чексиз кичине же чексиз чоң функциялардын катышынын предели, эгерде бул функциялардын туундулары жашаса, ал туундулардын катышынын пределине барабар болот.

Эгерде $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ же $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ түрүндөгү аныксыздык келип чыкса, анда

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{2.1}$$

барабардыгы орун алат.

□ Теореманы $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ түрүндөгү аныксыздык үчүн далилдейбиз. Жөнөкөйлүк үчүн $f(x)$ жана $g(x)$ функциялары жана алардын туундулары x_0 чекитинде үзгүлтүксүз, ошондой эле $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) = 0$ барабардыктары аткарылат деп божомолдойбуз.

Бул учурда $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$ орун алат. $[x, x_0]$ кесиндисинде $f(x)$ жана $g(x)$ функциялары үчүн Лагранждын теоремасын пайдаланалы:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c_1)(x-x_0)}{f'(c_2)(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c_1)}{f'(c_2)}, x < c_1, c_2 < x_0 .$$

$f'(x)$ жана $g'(x)$ функциялары үзгүлтүксүз болгондуктан, $x \to x_0$ да $f'(c_1) \to f'(x_0)$, $g'(c_2) \to g'(x_0)$ го ээ болобуз. Функциялардын тийиндисинин предели жөнүндөгү теореманын негизинде (2.1) барабардыгы келип чыгат □

Бул теорема **Лопиталдын теоремасы** деп аталат.

1-эскертүү. Эгерде $f'(x)$ жана $g'(x)$ функциялары $f(x)$, $g(x)$ функцияларына коюлган суроо-талаптарды канаатандырса, анда Лопиталдын эрежесин кайрадан колдонууга болот.

2-эскертүү. Лопиталдын теоремасы $x \to \pm\infty$ учурларда да орун алат.

Мисалдарды келтирели.

1-мисал. Пределди эсептегиле: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{2x^2}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{2x^2}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(2x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{4x}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)'}{(4x)'} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{4} = \frac{1}{4}.$$

Бул пределди эсептөөдө биз $\left(\frac{0}{0}\right)$ түрүндөгү аныксыздыгын ачуу үчүн Лопиталдын эрежесин эки жолу пайдаландык.

2-мисал. Пределди эсептегиле: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{(e^{2x})'}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{2e^{2x}}{1} = 2.$$

3-мисал. Пределди эсептегиле: $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^a - a^x}{x-a}$.

$$\lim_{x \to a} \frac{x^a - a^x}{x-a}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to a} \frac{(x^a - a^x)'}{(x-a)'} = \lim_{x \to a} \frac{ax^{a-1} - a^x \ln a}{1} = a^a(1-\ln a).$$

б) Эгерде $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$ ге барабар болсо, анда $\frac{f(x)}{g(x)}$ функциясынын $x \to a$ умтулгандагы предели $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ түрүндөгү аныксыздыкты берет.

4-мисал. Пределди эсептегиле: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x}$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

5-мисал. Пределди эсептегиле: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{ctg\,\pi x}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{ctg\,\pi x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(\ln(x-1))'}{(ctg\,\pi x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x-1}}{-\pi\sin^{-2}\pi x}=-\frac{1}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2\pi x}{x-1}\left(\frac{0}{0}\right)=$$
$$=-\frac{1}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{(\sin^2\pi x)'}{(x-1)'}=-\lim_{x\to 1}\frac{\sin 2\pi x}{1}=0.$$

в) $(0\cdot\infty)$ жана $(\infty-\infty)$ түрүндөгү аныксыздыктарды $\left(\frac{0}{0}\right)$ жана $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ түрүндөгү аныксыздыктарга алып келүүгө болот.

Мисалда көрсөтөлү.

6-мисал. $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$ пределин эсептегиле.

◊ Бул $(0\cdot\infty)$ түрүндөгү аныксыздык. Предел алдындагы туюнтманы өзгөртүп түзөбүз: $x\ln x=\dfrac{\ln x}{1/x}$ жана мындан биз $x\to +0$ да $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ түрүндөгү аныксыздыкка ээ болобуз. Эми Лопиталдын эрежесин пайдаланып:

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x(0.\infty)=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0+}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'}=\lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2}=-\lim_{x\to 0+}x=0$$

ээ болобуз ◊

7-мисал. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos ecx-ctgx)$ пределин эсептегиле.

◊ Бул $(\infty-\infty)$ түрүндөгү аныксыздык. Предел алдындагы туюнтманы өзгөртүп түзөбүз:

$$\cos ecx-ctgx=\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

Акыркыдан $x\to 0$ да пределге өтсөк, $\left(\frac{0}{0}\right)$ түрүндөгү аныксыздыкка ээ болобуз. Анда Лопиталдын эрежесин колдонсок:

$$\lim_{x\to 0}(\cos ecx-ctgx)(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\sin x)'}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{0}{1}=0 \quad ◊$$

г) $y=u(x)^{v(x)}$ көрүнүшүндөгү функциянын пределин эсептөөдө келип чыгуучу $\left(0^0, 1^\infty, \infty^0\right)$ түрүндөгү аныксыздыктарды ачууну карайлы. Бул аныксыздыктар

$$u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)} \qquad (2.2)$$

өзгөртүп түзүүсүнүн жардамында жогоруда каралган $0\cdot\infty$ түрүндөгү аныксыздыкка алынып келинет.

8-мисал. $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$ пределин эсептегиле.

◊ Бул (0^0) түрүндөгү аныксыздык. Предел алдындагы функцияны (2.2) өзгөртүп түзүүсүнүн жардамы менен өзгөртүп, $x^x = e^{x\ln x}$ ээ болобуз. Мындан пределге өтүп,

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^0 = 1 \ ◊$$

9-мисал. $\lim\limits_{x\to 0+} (1+x)^{ctgx}$ пределин эсептегиле.

◊ Бул (1^{∞}) түрүндөгү аныксыздык. Предел алдындагы функцияны өзгөртүп түзөбүз. $y = ctgx\ \ln(1+x)$ белгилөөсүн кийирип, мунун $x \to 0$ пределин табабыз:

$$\lim_{x\to 0} ctgx\ \ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{tgx}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln(1+x))'}{(tgx)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1/(1+x)}{1/\cos^2 x} =$$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x}{1+x} = 1.$ Мындан изделүүчү предел $\lim\limits_{x\to 0} e^y = e^1 = e$ ээ болобуз. ◊

§3. Өсүүчү жана кемүүчү функциялар

1-аныктама. Эгерде каалагандай $x_1, x_2 \in X$ чекиттери үчүн $x_2 > x_1$ болгондо $f(x_2) > f(x_1)$ $(f(x_2) < f(x_1))$ шарты орун алса, анда $y = f(x)$ функциясы X аралыгында *өсүүчү (кемүүчү) функция* деп аталат.

1-теорема (функциянын өсүшүнүн жетиштүү шарты). Эгерде дифференцирленүүчү функциянын туундусу кандайдыр бир X аралыгынын ичинде оң болсо, анда берилген функция бул аралыкта өсөт.

□ Берилген X аралыгындагы x_1 жана x_2 маанилерин карайлы.
Айталы $x_2 > x_1$, $x_1, x_2 \in X$ болсун. Анда $f(x_2) > f(x_1)$ экендигин көрсөтөбүз.

$f(x)$ функциясы үчүн $[x_1, x_2]$ кесиндисинде Лагранждын теоремасынын шарттары орун алгандыктан,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \qquad (3.1)$$

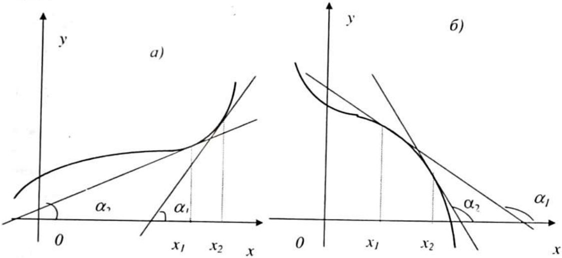
барабардыгы орун алат. Мында $x_1 < c < x_2$, б.а. c чекити туунду оң аныкталган кесиндиге таандык. Анда $f'(c) > 0$ болот да, (3.1) барабардыгынын оң жагы нөлдөн чоң болот. Ошентип, $f(x_2)-f(x_1)>0$ же $f(x_2)>f(x_1)$ келип чыгат □

Ушул сыяктуу эле төмөндөгү теореманы далилдөөгө болот.

2-теорема (функциянын кемишинин жетиштүү шарты). Эгерде дифференцирленүүчү функциянын туундусу кандайдыр бир X аралыгынын ичинде терс болсо, анда берилген функция бул аралыкта кемийт.

Функциянын монотондуулук шартынын (өсүүсүнүн жана кемүүсүнүн) геометриялык мааниси 3.1- чиймеде берилген.

Эгерде кандайдыр бир аралыкта ийри сызыктын жанымалары абсцисса огунун оң багыты менен тар бурч түзүшсө, анда функция өсөт (3.1-чийме, а)), ал эми бул жанымалар абсцисса огунун оң багыты менен кең бурч түзүшсө, анда функция кемийт (3.1-чийме, б)).



3.1-чийме

1-мисал. $y=x^2-4x+3$ функциясынын монотондуулук интервалын тапкыла.

◊ $y'=2x-4,\ y'>0 \Rightarrow 2x-4>0 \Rightarrow x>2,\ \ y'<0 \Rightarrow 2x-4<0 \Rightarrow x<2$

Демек, $x>2$ болгондо $y'>0$ болот, б.а. $(2;+\infty)$ интервалында функция өсөт. Ал эми $x<2$ болгондо $y'<0$, б.а. $(-\infty;2)$ интервалында функция кемийт. Мында $x_0=2$ параболанын чокусунун абсциссасы ◊

Функциянын монотондуулугунун зарылдык шарты бир аз күчсүзүрөөк экендигин белгилей кетүү керек.

Эгерде функция кандайдыр бир X аралыгында өссө (кемисе), анда бул аралыктагы функциянын туундусу терс эмес (оң эмес) болот: $f'(x)\geq 0 \left(f'(x)\leq 0\right), x\in X$, б.а. калган чекиттерде монотондуу функциянын туундусу нөлгө барабар болушу да мүмкүн.

2-мисал. $y=x^3$ функциясынын монотондуулук интервалын тапкыла.

◊ $y'=3x^2$ туундусун табабыз. $x\neq 0$ болгондо $y'>0$ болот. Ал эми $x=0$ болгондо туунду да нөлгө айланат. Берилген функциябыз болсо, бардык сан огунда монотондуу өсөт. ◊

§4. Функциянын экстремуму

1-аныктама. Эгерде x_0 чекитинин кандайдыр бир аймагында $f(x)\leq f(x_0)$ шарты орун алса (4.1-чийме), анда x_0 чекити $f(x)$ функциясынын *максимум чекити* деп аталат.

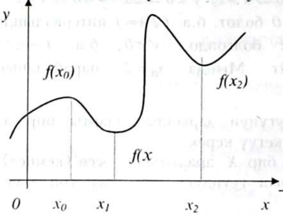
2-аныктама. Эгерде x_1 чекитинин кандайдыр бир аймагында $f(x)\geq f(x_1)$ шарты орун алса (4.1-чийме), анда x_1 чекити $f(x)$ функциясынын *минимум чекити* деп аталат.

Функциянын x_0 жана x_1 чекиттериндеги маанилери тиешелүү түрдө *функциянын максимуму жана минимуму* деп аталышат.

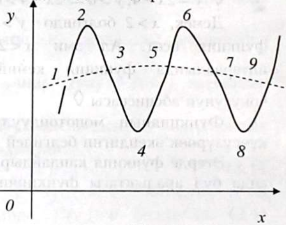
Функциянын максимумун жана минимумун биргеликте *функциянын экстремуму* деп атайбыз.

Экстремум түшүнүгү x_0 чекитинин жетишээрлик кичине аймагы менен байланышканын эске алып, функциянын экстремумун көп учурда *локалдык экстремум* деп да атайбыз.

Бир эле аралыкта функция бир нече экстремумга ээ болушу жана ошол эле учурда функциянын бир чекиттеги минимуму экинчи бир чекиттеги максимумунан чоң болушу мүмкүн. Мисалы, 4.1-чиймеде $f_{min}(x_2)>f_{max}(x_0)$. X аралыгынын анык бир чекитинде функциянын максимумга (минимумга) ээ болушу, бул чекитте $f(x)$ функциясы аралыктагы эң чоң (эң кичине) мааниге ээ (же глобалдык максимумга (минимумга) ээ дегенди билдирбейт.



4.1-чийме



4.2-чийме

Экстремум чекитинин маанилүүлүгүн төмөндөгү мисалда көрсөтөлү (4.2-чийме).

Айталы $y = f(x)$ функциясы 4.2-чиймедегидей түрдө берилсин. Мейли, биз бул ийри сызыкты сүрөттөгү 1,3,5,7,9 чекиттери аркылуу тургузалы. Анда $y = f(x)$ функциясынын чыныгы графигине окшобогон пунктир сызык менен көрсөтүлгөн ийри сызыкты алабыз.

Эгерде чиймеге 2,4,6,8 чекиттерин кошсок, анда практикалык түрдө бирдей графикке ээ болот элек.

Экстремумдун зарыл шарты.

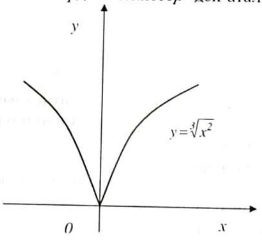
Эгерде $y = f(x)$ дифференцирленүүчү функциясы x_0 чекитинде экстремумга ээ болсо, анда бул чекиттин кандайдыр бир аймагында Ферманын теоремасынын шарттары аткарылат. Анда чекиттеги функциянын туундусу нөлгө барабар, б.а. $f'(x_0) = 0$ болот.

Бирок, функция дифференцирленүүчү болбогон чекиттерде да экстремумга ээ болушу мүмкүн.

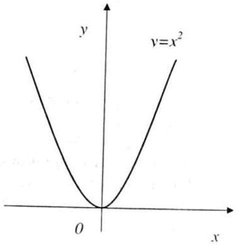
1-мисал. $y = |x|$ функциясы $x = 0$ чекитинде экстремумга (минимумга) ээ, бирок бул чекитте дифференцирленүүчү эмес. Ал эми $y = \sqrt[3]{x^2}$ функциясы $x = 0$ чекитинде минимумга ээ (4.3-чийме), ал эми анын бул чекиттеги туундусу чексизге барабар: $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; $y'(0) = \infty$.

Экстремумдун зарыл шарты төмөндөгүдөй айтылат: $y = f(x)$ функциясы x_0 чекитинде экстремумга ээ болушу үчүн бул чекиттеги функциянын туундусу 0 го барабар болушу $(f'(x_0) = 0)$ же жашабашы зарыл.

Экстремумдун зарыл шарты аткарылган чекиттер, б.а. туунду нөлгө барабар болгон же жашабаган чекиттер, *критикалык же стационардык чекиттер* деп аталат.



4.3-чийме



4.4-чийме

Ошентип, кандайдыр бир чекитте функция экстремумга ээ болсо, анда бул критикалык чекит болот. Бул сүйлөмдүн тескериси орун албайт, б.а. критикалык чекит ар дайым эле экстремум чекити боло бербейт.

2-мисал. Төмөндөгү функциялардын критикалык чекиттерин тапкыла жана экстремум чекиттерин аныктагыла:

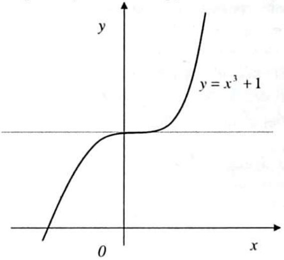
$$а)\, y = x^2; \quad б)\, y = x^3 + 1; \quad в)\, y = \sqrt[3]{x-1}\ .$$

◊ а) $y' = 2x, y' = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$. $x = 0$ чекитинде функциянын туундусу $y'(0) = 0$ жана бул чекитте $y = x^2$ функциясы экстремумга ээ (4.4-чийме).

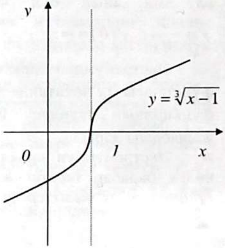
б) $y = x^3 + 1$ функциясы даражалуу функциялардын касиеттери боюнча бардык сан огунда өсөт. $y' = 3x^2$ туундусу $x = 0$ чекитинде 0 го барабар, б.а. $y'(0) = 0$. Бирок, $x = 0$ чекитинде берилген функция экстремумга ээ эмес (4.5-чийме).

в) $y = \sqrt[3]{x-1}$ функциясы бардык сан огунда өсөт, ал эми $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ туундусу $x = 1$ чекитинде жашабайт, б.а. $y'(1) = \infty$.

Бирок, бул чекитте функция экстремумга ээ эмес (4.6-чийме) ◊



4.5-чийме



4.6-чийме

Демек, функциянын экстремумун табуу үчүн критикалык чекиттерди кошумча изилдөө талап кылынат, б.а. экстремумдун жетиштүү шартын билүү талап кылынат.

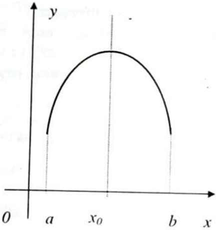
Экстремумдун биринчи жетиштүү шарты.

1-теорема. Эгерде x_0 чекити аркылуу солдон оңго өткөндө дифференцирленүүчү $y = f(x)$ функциясынын туундусу өз белгисин "+" тан "-" ка өзгөртсө, анда x_0 чекити $y = f(x)$

функциясынын максимум чекити болот, ал эми белгисин "-" тан "+" өзгөртсө, анда x_0 минимум чекити болот.

☐ Айталы, туунду белгисин "+" тан "-" ка өзгөртсүн, б.а. кандайдыр бир (a,x_0) интервалында $f'(x)>0$, ал эми экинчи бир (x_0,b) интервалында $f'(x)<0$ болсун. Анда монотондуулуктун жетиштүү шарты боюнча $f(x)$ функциясы (a,x_0) интервалында өсөт жана (x_0,b) интервалында кемийт (4.7-чийме).

өсүүчү функциянын аныктамасы боюнча $\forall x\in(a,x_0)$ үчүн $f(x_0)>f(x)$, ал эми кемүүчү функциянын аныктамасы боюнча $\forall x\in(x_0,b)$ үчүн $f(x)<f(x_0)$ болот, б.а. $\forall x\in(a,b)$ үчүн $f(x_0)\geq f(x)$. Анда x_0 чекити $y=f(x)$ функциясынын максимум чекити болот.



4.7-чийме

Ушул сыяктуу эле туундунун белгиси "-" тан "+" өзгөргөн учурун далилдөөгө болот ☐

Бул теореманы далилдөөдө x_0 чекитинин өзүндөгү функциянын дифференцирленүүчүлүгү пайдаланылбаганын белгилей кетүү керек. Чынында функциянын x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болуусу эле жетиштүү болот.

Демек, $y=f(x)$ функциясынын x_0 чектинде экстремумга ээ болуу шарты болуп, анын туундусунун белгиси өзгөрүүсү, б.а. $y=f(x)$ ийри сызыгынын жанымаларынын жантаюу бурчтарынын максимум чекити аркылуу солдон оңго өтүүдө тар бурчтан кең бурчка өтүүсү (4.8-чийме.а)) же минимум чекити аркылуу өтүүдө кең бурчтан тар бурчка өтүүсү (4.8-чийме б)) эсептелинет. Эгерде туундунун белгиси өзгөрбөсө, анда экстремум жок.

$y=f(x)$ функциясын экстремумга изилдөө схемасы.

1) $y'=f'(x)$ туундусун табуу.

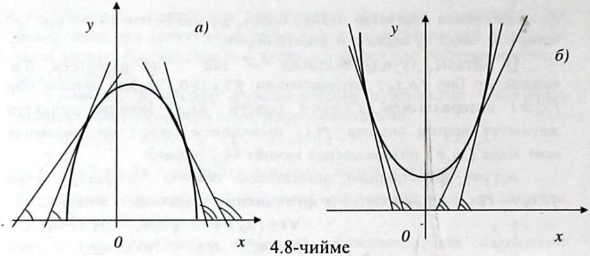
2) Функциянын критикалык чекиттерин аныктоо.

3) Критикалык чекиттердеги туундунун белгисин изилдөө жана функциянын экстремум чекиттерин аныктоо.

4) Функциянын экстремумун (экстремалдык маанисин) табуу.

3-мисал. $y=x(x-1)^3$ функциясын экстремумга изилдегиле.

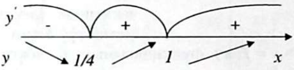
◊ 1) $y'=(x-1)^3+3x(x-1)^2=(x-1)^2(4x-1)$.



4.8-чийме

2) Туундуну нөлгө барабарлоо менен критикалык чекиттерди табабыз: $x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = 1$. Берилген функциянын туундусу $f'(x)$ бардык сан огунда аныкталган. Демек, туунду жашабай турган чекиттер жок.

3) Критикалык чекиттерди сан огунда белгилеп алабыз. Анда бул чекиттер аркылуу сан огу $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}; 1\right), (1; +\infty)$ интервалдарына бөлүнөт (4.9-чийме).



4.9-чийме

$x = \frac{1}{4}$ критикалык чекитинин оң жана сол жагындагы туундунун белгисин аныктоо үчүн, $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$ жана $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$ интервалдарында жаткан каалагандай чекиттердеги туундунун маанилерин табабыз. Мисалы, $x = 0, x = \frac{1}{2}$ чекиттерин алып, $f'(0) = -1 < 0$, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} > 0$ экендигин алабыз. Анда бардык

$x<\frac{1}{4}$ үчүн $f'(x)<0$ жана $\left(\frac{1}{4};1\right)$ интервалында $f'(x)>0$ болот. Ушуга окшош эле $(1;\infty)$ интервалында $f'(x)>0$ экендигин көрсөтөбүз. Экстремумдун жетиштүү шарты боюнча $x=\frac{1}{4}$ чекити берилген функциянын минимум чекити болот. $x=1$ чекитинде экстремум жок.

4) $f_{min}\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)^3=-\frac{27}{256}$ ◊

2-теорема (экстремумдун экинчи жетиштүүлүк шарты). Эгерде эки жолу дифференцирленүүчү функциянын биринчи туундусу $f'(x)$ кандайдыр бир x_0 чекитинде нөлгө барабар, ал эми бул чекиттеги функциянын экинчи туундусу $f''(x_0)$ оң болсо, анда x_0 чекити $f(x)$ функциясынын минимум чекити болот. Эгерде $f''(x_0)$ терс болсо, анда x_0 максимум чекити болот.

□ Айталы $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)>0$ болсун. Анда x_0 чекитинин кандайдыр бир аймагында $f''(x)=(f'(x))'>0$, б.а. x_0 чекитин кармаган кандайдыр бир (a,b) интервалында $f'(x)$ өсөт дегенди билдирет.

Бирок $f'(x_0)=0$. Анда (a,x_0) интервалында $f'(x)<0$, ал эми (x_0,b) интервалында $f'(x)>0$, б.а. функциясы x_0 чекити аркылуу өтүүдө белгисин «-» тан «+» ка өзгөртөт, б.а. x_0 минимум чекити болот.

Ушундай эле $f'(x_0)=0$ жана $f''(x_0)<0$ учурун далилдөөгө болот □

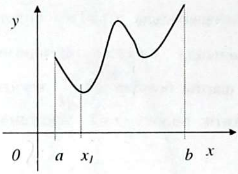
$y=f(x)$ функциясын экстремумдун экинчи жетиштүү шартын пайдаланып экстремумга изилдөө схемасы жогорку схемадан бир аз гана айырмаланат. Бул схемада 3-пункт төмөндөгүдөй болот:

3) Берилген функциянын $f''(x)$ экинчи туундусун таап жана ар бир критикалык чекиттеги анын маанисин аныктоо зарыл.
Ал эми 1,2,4-пункттары дал келет.

Эгерде x_0 критикалык чекитинде $f''(x_0)=0$ болсо, анда экстремумдун биринчи жетиштүү шартын пайдалануу керек.

§5. Функциянын кесиндидеги эң чоң жана эң кичине маанилери

Оптималдаштыруу маселелерин чечүүдө функциянын X аралыгындагы эң чоң жана эң кичине (глобалдык максимум жана глобалдык минимумун) маанисин табуу негизги орунда турат.



Эгерде $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болсо, анда Вейерштрасстын теоремасы боюнча функция берилген кесиндиде эң чоң жана эң кичине маанилерди кабыл алат.

5.1-чийме

Функция эң чоң жана эң кичине маанисине экстремум чекиттеринде жана кесиндинин учтарында ээ болуусу мүмкүн. 5.1-чиймеде функция эң чоң маанисине кесиндинин $x=b$ учунда ээ болот, ал эми эң кичине маанисине x_1 минимум чекитинде ээ болот.

Кесиндидеги эң чоң жана эң кичине маанилерди табуу үчүн төмөндөгү схеманы пайдалануу ыңгайлуу:

1) $f'(x)$ туундусун табуу.

2) Критикалык чекиттерин табуу.

3) Критикалык чекиттердеги жана кесиндинин учтарындагы функциянын маанилерин таап, алардын ичинен эң чоң $f_{\text{эң чоң}}$ жана эң кичине $f_{\text{эң кичине}}$ маанилерин тандап алабыз.

1-мисал. $y=(x-2)^2e^{-x}$ функциясынын $[0;5]$ кесиндидеги эң чоң жана эң кичине маанилерин тапкыла.

◊ 1) $f'(x)=2(x-2)e^{-x}-(x-2)^2e^{-x}=-e^{-x}(x-2)(x-4)$.

2) $f'(x)=0$ теңдемесинен $x_1=2, x_2=4$ критикалык чеккиттерин алабыз.

3) Критикалык чекиттеги функциянын маанилери $f(2)=0$, $f(4)=\dfrac{4}{e^4}$ жана кесиндинин учтарындагы функциянын маанилерин $f(0)=4$, аныктайбыз. Бул маанилерди салыштырып,

$f_{\text{эң чоң}}=f(0)=4$, $f_{\text{эң кичине}}=f(2)=0$ экенине ынанабыз ◊

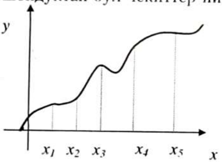
Эскертүү. Эгерде $y=f(x)$ функциясы (x_1,x_2) интервалында үзгүлтүксүз болсо, анда бул функция берилген интервалда эң чоң жана эң кичине маанилерге ээ болбоосу да мүмкүн. Жекече учурда, эгерде диффренцирленүүчү функция (a,b) интервалында бир гана максимум чекитине (бир гана минимум чекитине) ээ болсо, анда функциянын эң чоң (функциянын эң кичине) мааниси функциянын максимуму (функциянын минимуму) менен дал келет.

2-мисал. (1;3) интервалында $y = x^2 - 6x + 5$ функциясы бир минимумга ээ болот: $y_{min} = y(3) = -4$. Ушул эле маани функциянын эң кичине мааниси да болуп эсептелет: $y_{эң\ кич.} = -4$. Берилген функция көрсөтүлгөн интервалда эң чоң мааниге ээ эмес.

§6. Функциянын томпоктугу. Ийилүү чекити

Биз функциянын графигин түзүүдө негизги орунда болгон экстремум чекиттерин кеңири изилдедик. Эми функциянын графигин "сапаттуу" түзүү үчүн керек болгон функциянын башка "түйүндүү" чекиттерин аныктайбыз.

Графиги 6.1-чиймеде берилген функцияны карайлы. Бул функция
бардык сан огунда өсөт жана экстремумга ээ эмес. x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 чекиттеринде функциянын графиги "ийилгенсип" турат. Ошондуктан бул чекиттер ийилүү чекиттери деп аталат.



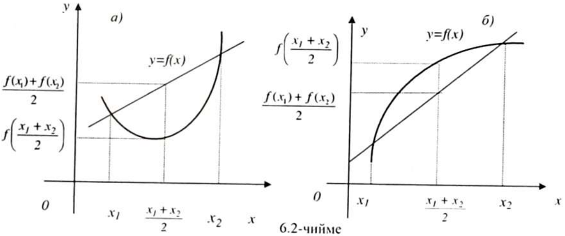
6.1-чийме

1-аныктама. Эгерде каалагандай $x_1, x_2 \in X$ чекиттери үчүн

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

барабарсыздыгы орун алса, анда $y = f(x)$ функциясы X аралыгында *төмөн карай томпок* деп аталат.

2-аныктама. Эгерде каалагандай $x_1, x_2 \in X$ чекиттери үчүн $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \ge \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ барабарсыздыгы орун алса, анда $y = f(x)$ функциясы X аралыгында *жогору карай томпок* деп аталат.



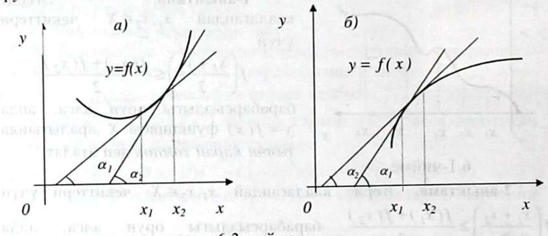
6.2-чийме

Жогору карай томпок болгон функция жөн эле *томпок* функция деп, ал эми төмөн карай томпок болгон функция *иймек* функция деп аталат.

Иймек жана томпок функциянын графиктери 6.2-чиймеде көрсөтүлгөн. Эгерде функция иймек болсо, анда бул функциянын графигинин каалагандай хордасынын каалагандай чекити графиктин тишелүү чекитинен төмөн жайланышпайт (6.2-чийме, а)). Ал эми функция томпок болсо, анда анын графигинин каалагандай хордасынын каалагандай чекити графиктин тишелүү чекитинен жогору жайланышпайт (6.2-чийме, б)).

1-теорема. Берилген функция X аралыгында иймек (томпок) болот, качан гана анын биринчи туундусу бул аралыкта монотондуу өссө (кемисе).

Бул теореманын геометриялык мааниси: эгерде $f'(x)$ туундусу X аралыгында өссө (кемисе), анда графиктин жанымасынын жантаюу бурчу да өсөт (кемийт) (6.3-чийме, а, б)). Бул функциянын иймектигин (томпоктугун) билдирет.



6.3-чийме

Монотондуулук шартын пайдаланып, биз функциянын иймек (томпок) болушунун төмөндөгүдөй жетиштүү шартын аныктай алабыз.

2-теорема. Эгерде эки жолу дифференцирленүүчү функциянын экинчи туундусу кандайдыр бир X аралыгында оң (терс) болсо, анда бул аралыкта берилген функция иймек (томпок) болот.

□ Эгерде $x \in X$ үчүн $f''(x)=(f'(x))'>0$ болсо, анда $f'(x)$ функциясы X аралыгында өсөт. Анда 1-теореманын негизинде $f(x)$ функциясы X аралыгында иймек болот. Каалагандай $x \in X$ үчүн $f''(x)<0$ болгон учурун ушуга окшош эле кароого болот □

Функциянын томпоктуулугунун зарыл шарты бир аз күчсүзүрөөк экендигин белгилей кетүү керек. Эгерде функция X

аралыгында томпок болсо, анда каалагандай $x\in X$ үчүн $f''(x)\le 0$ (же $f''(x)\ge 0$) болот.

1-мисал. $y=x^4$ функциясы бардык сан огунда иймек болсо да $y''=12x^2$ туундусу ар дайым оң эмес, б.а. $x=0$ болгондо $f''(0)=0$ болот.

3-аныктама. Үзгүлтүксүз функциянын графигинин *ийилүү чекити* деп, бул функциянын иймек жана томпок болгон интервалдарын бөлүп туруучу чекит аталат.

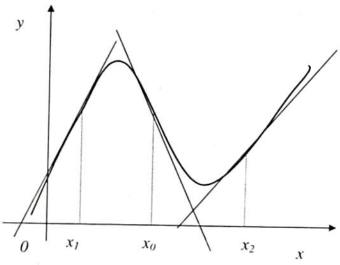
Жогоруда айтылгандарды эске алсак, анда ийилүү чекити – бул биринчи туундунун экстремум чекити болот.

3-теорема (ийилүүнүн зарыл шарты). Эки жолу дифференцирленүүчү функциянын x_0 ийилүү чекитинде экинчи туундусу $f''(x)$ нөлгө барабар, б.а. $f''(x_0)=0$ болот.

4-теорема (ийилүүнүн жетиштүү шарты). Эгерде эки жолу дифференцирленүүчү функциянын экинчи туундусу $f''(x)$ кандайдыр бир x_0 чекити аркылуу өтүүдө өз белгисин өзгөртсө, анда x_0 чекити анын графигиндеги ийилүү чекити болот.

Ийилүү чекити төмөндөгүдөй мааниге ээ (6.4-чийме): x_1 чекитинин аймагында функция томпок болот жана анын графиги бул чекит аркылуу өткөн жанымадан *төмөн* жайланышат, x_2 чекитинин аймагында функция иймек жана анын графиги бул чекит аркылуу өткөн жанымадан *жогору* жайланышат. Ал эми x_0 ийилүү чекитиндеги жаныма графикти бөлүп турат, мында график жаныманын эки жагында тең жайланышат.

Эгерде дифференцирленүүчү функциянын критикалык чекити экстремум чекити болбосо, анда ал ийилүү чекити болоорун белгилей кетүү керек.



6.4-чийме

§7. Функциянын графигинин асимптоталары

Мурдагы параграфтарда биз функциянын мүнөздүк чекиттерин үйрөндүк. Эми функциянын мүнөздүк сызыктарын карайбыз. Алардын негизгилеринин бири болуп асимптоталар эсептелинет.

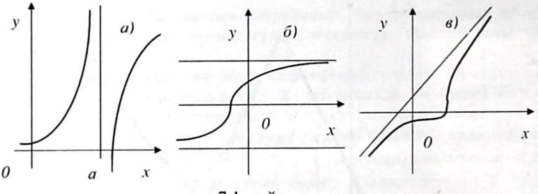
1-аныктама. $y=f(x)$ функциясынын графигинин *асимптотасы* деп, төмөндөгүдөй касиетке ээ болгон түз сызык аталат: графиктин чекиттерин координата башталышынан чексиз аралыкка алыстатууда $(x,f(x))$ чекитинен бул түз сызыкка чейинки аралык нөлгө умтулат.

7.1-чиймесин а) сында вертикалдык асимптота; б) сында горизанталдык асимптота; в) сында жантык асимптота көрсөтүлгөн. Графиктин асимптоталарын табуу төмөндөгү теоремаларга негизделген.

1-теорема. Айталы $y=f(x)$ функциясы x_0 чекитинин кандайдыр бир аймагында аныкталган жана $x\to x_0-0$ (солдон), $x\to x_0+0$ (ондон) умтулгандагы пределинин жок дегенде бири чексизге барабар, б.а. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$ же $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$ болсун.

Анда $x=x_0$ түз сызыгы $y=f(x)$ функциясынын графигинин вертикалдык асимптотасы болот.

Эгерде $y=f(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болсо, анда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ болот да, бул учурда $x=x_0$ түз сызыгы вертикалдык асимптота болбой калат. Демек, $x=x_0$ вертикалдык асимптоталарын $y=f(x)$ функциясынын үзүлүү чекиттеринде же анын (a,b) аныкталуу областынын учтарынан издөө керек.



7.1-чийме

2-теорема. Айталы $y=f(x)$ функциясы жетиштердик чоң x терде аныкталсын жана $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ чектүү предели жашасын. Анда

$y=b$ түз сызыгы $y=f(x)$ функциясынын графигинин горизанталдык асимптотасы болот.

Эскертүү: Эгерде $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ сол же $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ оң пределдеринин бири гана чектүү болсо, анда функция $y=b$- сол жактуу же $y=b$ оң жактуу горизонталдык асимптотасына ээ болот.

Эгерде $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ болсо, анда функция жантык асимптотага ээ болушу мүмкүн.

3-теорема. Айталы $y=f(x)$ функциясы жетишээрлик чоң x тер үчүн аныкталсын жана $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$, $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$ чектүү пределдери жашасын. Анда $y=kx+b$ түз сызыгы $y=f(x)$ функциясынын графигинин жантык асимптотасы болот.

□ Эгерде $y=kx+b$ жантык асимптота болсо, анда $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\dfrac{f(x)}{x}-k-\dfrac{b}{x}\right)=0$ жана $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}-k-\dfrac{b}{x}\right)=0$ орун алат. Ошондуктан $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Эми $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$ барабарсыздыгынан, b - чектүү сан экендигин эске алсак, $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$ ээ болобуз.

Жантык асимптота да горизонталдык асимптота сыяктуу оң жактуу жана сол жактуу болушу мүмкүн. □

1-мисал. $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}, c\neq 0, \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$, сызыктуу функциясынын графигинин асимптотасын тапкыла.

◊ Бул функциянын аныкталуу областына $x=-\dfrac{d}{c}$ чекити кирбейт. $x\to-\dfrac{d}{c}$ учурда $f(x)$ функциясынын пределин табабыз. Ал үчүн функцияны $\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{ax+b}{c\left(x+\dfrac{d}{c}\right)}$ түрүндө жазалы да, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$ экендигин эске алсак, $-\dfrac{d}{c}$ саны бөлчөктүн алымынын тамыры болбойт, б.а. $x\to-\dfrac{d}{c}$ учурда бөлчөктүн алымы нөлгө умтулбайт. Мындан $\lim\limits_{x\to-\frac{d}{c}}\dfrac{ax+b}{cx+d}=\pm\infty$ ге ээ болобуз. Анда $x=-\dfrac{d}{c}$ түз сызыгы вертикалдык асимптота болот. Ал эми $x\to\pm\infty$ учурда

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{ax+b}{cx+d} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}} = \dfrac{a}{c}$ болот. Мындан $y = a/c$ түз сызыгынын горизонталдык асимптота экендиги келип чыгат ◊

2-мисал. $y = \dfrac{3-2x}{x+1}$ функциясынын асимптоталары болуп $x=-1, y=-2$ түз сызыктары эсептелинет.

3-мисал. $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ функциясынын графигинин асимптоталарын тапкыла.

◊ Бул функциянын үзүлүү чекити болбогондуктан вертикалдык асимптотага ээ эмес, ал эми $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x^2+1} = \infty$ болгондуктан горзоталдык асимптотага ээ эмес. Жантык асимптотасын табалы:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2+1} : x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [\, f(x) - k\cdot x \,] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^3}{x^2+1} - 1\cdot x \right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left(-\frac{x}{x^2+1} \right) = 0.$$

Демек, функциянын графигинин жантык асимптотасы $y = kx + b = x$ көрүнүшүндө болот ◊

§8. Функцияны изилдөөнүн жана анын графигин түзүүнүн жалпы схемасы

Функцияны изилдөөдө жана анын графигин түзүүдө төмөндөгүдөй схеманы пайдалануу сунуш кылынат:

1) Функциянын аныкталуу областын табуу.

2) Функциянын жуп – тактыгын аныктоо.

3) Вертикалдык асимптотасын табуу.

4) Горизонталдык жана жантык асимптотасын табуу.

5) Функциянын экстремумун жана монотондуулук интервалдарын табуу.

6) Функциянын томпоктуулук интервалдарын жана ийилүү чекиттерин аныктоо.

7) Координаталык октор менен кесилишүү чекиттерин жана башка графикти тактоочу мүмкүн болгон чекиттерин табуу.

1-мисал. $y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ функциясын изилдегиле жана графигин түзгүлө.

◊ 1)Аныкталуу областы $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$, б.а. $x\neq\pm1$.

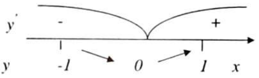
2) $f(-x)=\dfrac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2}=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}=f(x)$ болгондуктан, функция жуп жана анын графиги ордината огуна карата симметриялуу болот.

3) $x=1$ чекити функциянын үзүлүү чекити болгондуктан, $x\to1-$(солдон) $x\to1+$(оңго) умтулгандагы функциянын пределдерин табабыз. $\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}=-\infty$ жана $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}=+\infty$ болгондуктан, $x=1$ түз сызыгы вертикалдык асимптота болот. $f(x)$ функциясынын графигинин симметриялуулугунан $x=-1$ түз сызыгы да вертикалдык асимптота болот.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}=-1$. Мындан функциянын жуптугунан $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}=-1$ ге ээ болобуз, б.а $y=-1$ горизонталдык асимптота болот.

5) Функциянын экстремуму жана монотондуулук интервалдары. $x=0$ болгондо $y'=\dfrac{2x(1-x^2)+2x(1+x^2)}{(1-x^2)^2}=\dfrac{4x}{(1-x^2)^2}=0$ болот. Ал эми $x=\pm1$ чекиттеринде y' жашабайт.

$x=\pm1$ мааниси функциянын аныкталуу областына кирбегендиктен, критикалык чекит болуп $x=0$ чекити гана эсептелет.



8.1-чийме

$x<0$ болгондо $f'(x)<0$, $x>0$ болгондо $f'(x)>0$ болгондуктан (8.1-чийме), $x=0$ чекити минимум чекити жана функциянын минимуму $f_{min}=f(0)$ - болот.

$(-\infty;-1)$ жана $(-1;0)$ интервалдарында функция кемийт, ал эми $(0,1)$ жана $(1;+\infty)$ интервалдарында функция өсөт.

6) Томпоктуулук интервалдары жана ийилүү чекиттери. Экинчи тартиптеги туундуну табабыз:

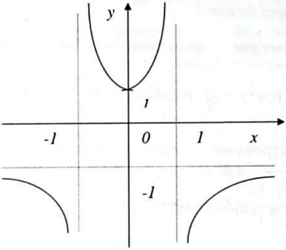
$$y'' = \frac{4(1-x^2)^2 - 4x\cdot 2(1-x^2)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}.$$

$(-1;1)$ интервалында $y''>0$ жана бул интервалдарда функция иймек болот. $(-\infty;-1)$ жана $(1;\infty)$ интервалдарында $y''<0$ жана бул интервалда функция томпок болот. Ийилүү чекиттери жок.

7) Координаталык октор менен кесилиш чекиттери.

$f(0)=1$, б.а. ордината огу менен $(0,1)$ чекитинде кесилишет. $f(x)=0$ теңдемесинин тамыры жашабагандыктан, функциянын графиги абсцисса огу менен кесилишпейт.

Бул функциянын графиги 8.2-чиймеде көрсөтүлгөн ◊



8.2-чийме

2-мисал. $y = 2xe^{\frac{-x^2}{2}}$ функциясын изилдегиле жана графигин түзгүлө.

◊ 1) Аныкталуу областы $(-\infty;\infty)$.

2) $f(-x) = 2\cdot(-x)e^{\frac{-x^2}{2}} = -2xe^{\frac{-x^2}{2}} = -f(x)$ болгондуктан, функция так жана координата башталышына карата симметриялуу.

3) Функция x тин бардык маанилери үчүн аныкталгандыктан вертикалдык асимптоталар жок.

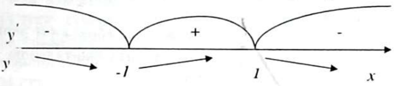
4) $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^{\frac{x^2}{2}}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)'}{\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{xe^{\frac{x^2}{2}}} = 0.$$

Функция так болгондуктан $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, б.а. $y=0$ түз сызыгы (абсцисса огу) горизонталдык асимптота болот.

5) Экстремумдар жана монотондуулук интервалдары. Функциянын туундусун табабыз:

$$y' = 2e^{\frac{-x^2}{2}} + 2xe^{\frac{-x^2}{2}}(-x) = 2e^{\frac{-x^2}{2}}(1-x^2).$$

$x=\pm 1$ болгондо $y'=0$ болот, б.а. $x_1=-1, x_2=1$ критикалык чекиттер. Туундунун белгиси 8.3-чиймеде көрсөтүлгөн.



8.3-чийме

Демек, $x=-1$ минимум чекити жана $x=1$ максимум чекити

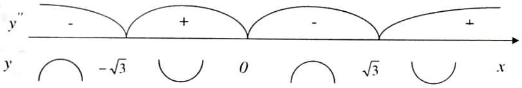
$f_{min}=f(-1)=-\dfrac{2}{\sqrt{e}}\approx -1{,}21;$ $\quad f_{max}=f(1)=\dfrac{2}{\sqrt{e}}\approx 1{,}21.$ Демек, $(-\infty;-1)$ жана $(-1;+\infty)$ интервалында функция кемийт жана $(-1;1)$ интервалында өсөт.

6) Томпоктуулук интервалдары жана ийилүү чекиттери.

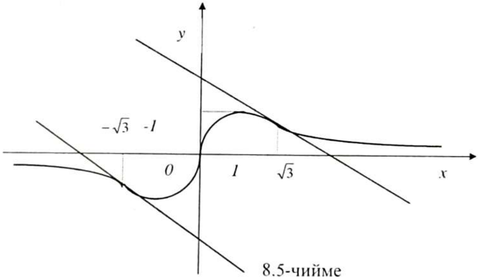
Функциянын экинчи туундусун табалы:

$$y''=2e^{\frac{-x^2}{2}}(-x)(1-x^2)-4xe^{\frac{-x^2}{2}}=-2xe^{\frac{-x^2}{2}}(3-x^2).$$

$x=0$ жана $x=\pm\sqrt{3}$ болгондо $y''=0$ болот. Экинчи туундунун белгилери 8.4-чиймеде көрсөтүлгөн.



8.4-чийме



8.5-чийме

Демек, $(-\sqrt{3},0)$, $(\sqrt{3},\infty)$ интервалдарында иймек жана $(-\infty;-\sqrt{3})$, $(0;\sqrt{3})$ интервалдарында томпок болот. $x_1=-\sqrt{3}, x_2=\sqrt{3}$ ийилүү чекиттери болушат.

7) $f(0)=0$. $f(x)=0$ теңдемеси жалгыз гана $x=0$ чечимине ээ болот, б.а. функциянын графиги координата башталышы аркылуу өтөт. Координаталык октор менен кесилишпейт.

Бул функциянын графиги 8.5-чиймеде көрсөтүлгөн ◊

§9. Экономикадагы колдонулуштары

1. **Микроэкономикадагы пределдик көрсөткүчтөр.**

Микроэкономикадагы эки пределдик көрсөткүчтү карайлы.

а) өндүрүлгөн продукциянын өздүк наркы C нын продукциянын көлөмү Q дан болгон көз карандылыгы $C=f(Q)$ менен аныкталсын. Мында *пределдик өздүк нарк* деп аталуучу чоңдук продукциянын ΔQ өсүндүсүнүн ΔC өздүк наркы мүнөздөйт:

$$MC=\frac{\Delta C}{\Delta Q}. \tag{9.1}$$

ΔC чоңдугу ΔQ чоңдугунан үзгүлтүксүз көз каранды деп болжолдосок, анда (9.1) катышы анын предели аркылуу алмаштырылат:

$$MC\approx\lim_{\Delta Q\to 0}\frac{\Delta C}{\Delta Q}=C'(Q). \tag{9.2}$$

Математикалык аппаратты колдонууда пределдик өздүк нарк катары (9.2) чоңдугун түшүнөбүз.

Айталы өндүрүлүүчү продукциянын көлөмүнөн өндүрүштүк чыгымдын көз карандылыгы $C=40Q-0{,}03Q^3$ а. б. формуласы менен туюнтулсун.

$Q=15$ көлөмдөгү продукцияны чыгаруудагы орточо жана пределдик чыгымдарды аныктайлы.

1) Продукциянын бирдигин өндүрүүгө кеткен орточо чыгымдар функциясы $\overline{C}=C/Q$ формуласы менен аныкталат. Биздин учурда $\overline{C}=40-0{,}03Q^2$ болот. Мындан $\overline{C}(15)=40-0{,}03\cdot 15^2=33{,}25$ а.б. ти алабыз.

2) Пределдик чыгымдар (9.2) формуласынан аныкталат: $C'=40-0{,}09Q^2$. Мындан $Q=15$ болгондо

$C'(15)=40-0{,}09\cdot 15^2=19{,}75$

а.б., б.а. продукциянын бирдигин өндүрүүгө кеткен орточо чыгым 33,25 а.б. ке, ал эми кошумча продукциянын бирдигин өндүрүүгө кеткен кошумча чыгымдар 19,75 а.б. ти түздү жана ал орточо чыгымдан ашып кетпейт.

б) Баа саясатын прогноздоодо жана анализдөөдө *суроо-талап ийкемдүүлүгү* түшүнүгү пайдаланылат. Айталы $D = f(P)$ суроо-талаптын товардын баасы P дан функциясы болсун. Анда суроо-талап ийкемдүүлүгү катары товардын баасы 1% ке өзгөргөн учурдагы суроо-талаптын % тик өзгөрүүсүн түшүнөбүз:

$$E = \frac{\Delta D / D \cdot 100\%}{\Delta P / P \cdot 100\%}. \tag{9.3}$$

Жогорудай эле ΔD чоңдугу ΔQ дан үзгүлтүксүз көз каранды болгон учурда, $\Delta P \to 0$ да пределге өтүү ыңгайлуу:

$$E(D) = P \cdot \frac{D'(P)}{D(P)}. \tag{9.4}$$

$S(P)$ сунуш функциясы үчүн да ушундай түшүнүктү киргизүүгө болот. Эгерде P баасы өссө, анда $D(P)$ функциясы кемийт, ал эми $S(P)$ функциясы өсөт.

Ийкемдүүлүктүн бир нече касиеттерин көрсөтөлү. (9.4) формуладан

$$E(D) = P(\ln D(P))' \tag{9.5}$$

ээ болобуз.

Мындан $E(D)$ функциясы логарифмдик функциянын касиеттерине ээ экендигин алабыз. Анда $E(D_1 \cdot D_2) = E(D_1) + E(D_2)$ жана $E(D_1 / D_2) = E(D_1) - E(D_2)$ келип чыгат.

$D(P)$ функциясы кемүүчү болгондуктан, $D'(P) < 0$ болот, анда (9.4) формуласы боюнча $E(D) < 0$ алабыз. Ал эми $S(P)$ сунуш функциясы өсүүчү болгондуктан, тиешелүү келүүчү ийкемдүүлүк $E(S) > 0$ болот.

$|E(D)|$ чоңдугуна карата суроо-талап үч түргө бөлүнөт:

а) Эгерде $|E(D)| > 1$ $(E(D) < -1)$ болсо, анда суроо-талап ийкемдүү болот;

б) Эгерде $|E(D)| = 1$ $(E(D) = -1)$ болсо, анда суроо-талап нейтралдуу болот;

в) Эгерде $|E(D)| < 1$ $(E(D) > -1)$ болсо, анда суроо-талап ийкемдүү эмес болот.

1-мисал. Айталы суроо-талап функциясы $D(P) = D_0 e^{-kP^2}$ формуласы аркылуу берилсин, мында D_0 жана k белгилүү чоңдуктар. Анда P баасынын кандай маанилеринде суроо-талап ийкемдүү болот.

◊ (9.4) формуласы боюнча $E(D)$ үчүн туюнтманы жазабыз:

$$E(D)=\frac{-2kPD_0e^{-kP^2}}{D_0e^{-kP^2}}\cdot P=-2kP^2.$$

Суроо-талап ийкемдүү болушу үчүн (а) учуру) төмөндөгү барабарсыздык орун алышы зарыл:

$$2kP^2>1\Rightarrow P>\frac{1}{\sqrt{2k}}\ \Diamond$$

2-мисал. Айталы продукциянын өздүк наркы C менен өндүрүү көлөмү Q нун ортосундагы көз карандылык $C=50-0{,}4Q$ формуласы аркылуу туюнтулсун. Продукцияны өндүрүү көлөмү $Q=30$ болгон учурда өздүк нарктын ийкемдүүлүгүн аныктагыла.

$\Diamond$ (9.4) формуласы боюнча $E(C)=-\frac{0{,}4Q}{50-0{,}4Q}$ болот. Мындан $Q=30$ болгон учурда изделүүчү ийкемдүүлүк $E(C)\approx-0{,}32$ болот, б.а. продукцияны өндүрүү көлөмүн 1% ке жогорулатуу өздүк нарктын болжол менен 0,32% ке төмөндөшүнө алып келет $\Diamond$

2. Пайданы максималдаштыруу. Айталы Q реализацияланган товардын саны, $R(Q)$ кирешe функциясы болсун. Бул функциянын түрү өндүрүштүн жолунан, инфраструктуранын уюштурулушунан көз каранды болот. Өндүрүлгөн товарды реализациялоодон алынган пайда

$$\Pi(Q)=R(Q)-C(Q) \tag{9.6}$$

формуласы менен берилет.

Микроэкономикада төмөндөгүдөй ырастоо белгилүү: пайда максималдуу болуш үчүн пределдик киреше жана пределдик чыгымдар барабар болушу зарыл. Бул пределдик көрсөткүчтөрдүн экөө тең (9.4) формуласы менен аныкталгандыктан, бул принцип $R'(Q)=C'(Q)$ түрүндө жазылат.

3-мисал. Эгерде киреше жана чыгым $R(Q)=100Q-Q^2$, $C(Q)=Q^3-37Q^2+169Q+4000$ формулалары менен берилсе, анда максимум пайданы тапкыла.

$\Diamond$ (9.6) формуласы боюнча пайда $\Pi(Q)=-Q^3+36Q^2-69Q-4000$ формуласы аркылуу туюнтулат. Пайда функциясынын туундусун нөлгө барабарлайбыз: $Q_1=1, Q_2=23$ болот. $Q=23$ болгондо биз максималдык пайданы алабыз: $\Pi_{max}=1290$ $\Diamond$

3. Өндүрүштүн эффективдүүлүгүнүн кемүү закону. өндүрүштөгү негизги факторлордун биринин, мисалы капиталдык чыгымдардын K нын жогорулашы менен өндүрүштүн өсүүсү K нын кандайдыр бир маанисинен баштап кемүүчү функция болот. Башкача айтканда өндүрүлгөн продукциянын V көлөмү K дан функция катары иймектиктен томпоктукка өзгөргөн график менен сүрөттөлөт.

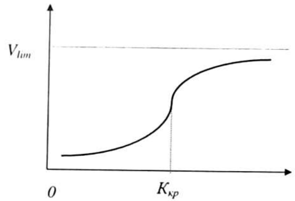
4-мисал. Айталы бул функция төмөндөгү теңдеме менен берилсин

$$V(K)=V_{lim}(1+e^{-bK+c}), \tag{9.7}$$

мында b жана c белгилүү оң сандар, ал эми V_{lim} - өндүрүлүүчү продукциясынын мүмкүн болгон пределдик көлөмү. (9.7) функциясынын экинчи туундусу $V''(K)=V_{lim}b^2e^{-bK+c}\cdot\dfrac{e^{-bK+c}-1}{\left(1+e^{-bK+c}\right)^3}$ көрүнүшүндө болот. Критикалык чекитти $V''(K)=0$ шартынан аныктайбыз:

$$K_{кр}=c/b. \tag{9.8}$$

(9.7) функциясынын графиги 9.1-чиймеде көрсөтүлгөн.



9.1-чийме

(9.8) ийилүү чекитинде функция ийилектиктен томпоктукка өзгөрөт. Бул чекитке чейинки капиталдык чыгымдардын жогорулашы продукциянын көлөмүнүн интенсивдүү өсүүсүнө алып келет: продукциянын көлөмүнүн өсүү темпи жогорулайт, б.а. $V''(K)>0$. Ал эми $K>K_{кр}$ болгондо продукциянын көлөмүнүн өсүү темпи төмөндөйт, б.а. $V''(K)<0$ болот жана капиталдык чыгымдардын өсүүсүнүн эффективдүүлүгү түшүп кетет.

Демек, капиталдык чегерүүлөр стратегиясында чыгымдардын критикалык көлөмүн аныктоо маанилүү момент болуп эсептелет. Бул прогнозду билүү менен өндүрүштү уюштуруунун структурасын өзгөртүүгө жана өркүндөтүүгө: b,c жана V_{lim} көрсөткүчтөрүн капиталдык чегерүүлөрдүн эффективдүүлүгүн жогорулатуу үчүн «жакшыртууга» аракеттенүүгө болот.

Көнүгүүлөр

Лопиталдын эрежелерин пайдаланып, пределди эсептегиле.

10.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}$; 10.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$; 10.3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\ln x}$;

10.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-arctgx}{x^3}$; 10.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$; 10.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$;

10.7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{tg\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$; 10.8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$; 10.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

10.10. $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln x$.

Төмөндөгү функциялардын монотондуулук интервалын тапкыла:

10.11. $y=2+x-x^2$; 10.12. $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$;

10.13. $y=x+\sin x$; 10.14. $y=\dfrac{x^2}{2x}$.

Төмөндөгү функцияларды экстремумга изилдегиле:

10.15. $y=x^3-6x^2+9x-4$; 10.16. $y=x+\dfrac{1}{x}$;

10.17. $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$; 10.18. $y=\dfrac{10}{1+\sin^2 x}$.

Төмөндөгү функциялардын берилген кесиндидеги эң чоң жан эң кичине маанилерин тапкыла:

10.19. $f(x)=2^x, [-1;5]$; 10.20. $f(x)=x^2-4x+6, [-3;10]$;

10.21. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}, [0{,}01;100]$; 10.22. $f(x)=\sqrt{5-4x}; [-1{,}1]$.

Төмөндөгү функциялардын ийилүү чекиттерин жана томпоктуулук интервалдарын тапкыла:

10.23. $y=3x^2-x^3$; 10.24. $y=x+\sin x$;

10.25. $y=\sqrt{1+x^2}$; 10.26. $y=e^{-x^2}$.

Берилген функциялардын асимптоталарын тапкыла.

10.27. $y=\dfrac{1}{x^2-4x+5}$; 10.28. $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$;

10.29. $y=xe^x$; 10.30. $y=2x+arctg\dfrac{x}{2}$.

Төмөндөгү функцияларды изилдегиле жана графигин түзгүлө:

10.31. $y=3x-x^2$; 10.32. $y=(1+x)(x-2)^2$; 10.33. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$;

10.34. $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$; 10.35. $y=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$; 10.36. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

10.37. (D) суроо-талап жана (S) сунуш функциялары (P) баадан көз карандылыгы $D=9-P, S=1+P$ түрүндө берилсин. Тең салмактуулук баадагы суроо-талап жана сунуш ийкемдүүлүктөрүн, ошондой эле баа 10%.ке көбөйгөндөгү кирешенин өзгөрүүсүн тапкыла.

10.38. Продукцияны өндүрүүнүн (V) көлөмүнүн (K) капиталдык чыгымдардан көз карандылыгы $V=V_0 \ln(4+K^3)$ функциясы менен аныкталсын. Капиталдык чыгымдардын жогорулашы эффективдүү болбогон K нын өзгөрүү интервалын тапкыла.

ОН БИРИНЧИ ГЛАВА
АНЫК ЭМЕС ИНТЕГРАЛДАР

§1.Баштапкы функция жана анык эмес интегралдар

Дифференциалдык эсептөөлөрдөгү негизги маселелердин бири болуп берилген функциялардын туундусун же дифференциалын табуу. Интегралдык эсептөөлөр, тескери маселени, б. а. берилген туундусу же дифференциалы боюнча функциянын өзүн табуу маселесин чечет.

1-аныктама. Эгерде X аралыгынан алынган бардык x маанилери үчүн $F'(x)=f(x)$ барабардыгы орун алса, анда $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясынын X аралыгындагы **баштапкы функциясы** деп аталат.

Баштапкы функцияга мисалдар келтирели.

1. $F(x)=\sin x$ функциясы $f(x)=\cos x$ функциясы үчүн бардык сан огунда баштапкы функция болот. Себеби каалагандай x мааниси үчүн $(\sin x)'=\cos x$ орун алат.

2. $F(x)=x^3$ функциясы $f(x)=3x^2$ функциясы үчүн бардык сан огунда баштапкы функция болот. Анткени каалагандай x үчүн $(x^3)'=3x^2$.

3. $F(x)=\sqrt{1-x^2}$ функциясы $f(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ функциясы үчүн $(-1,1)$ интервалында баштапкы функция. Себеби каалагандай $x\in(-1,1)$ үчүн $\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Берилген $f(x)$ функциясы боюнча анын баштапкы функциясын табуу маселеси бир маанилүү чечилбейт. Чындыгында, эгерде $F(x)$ функциясы $f(x)$ үчүн баштапкы функция, б. а. $F'(x)=f(x)$ болсо, анда каалагандай C турактуу үчүн $F(x)+C$ функциясы да $f(x)$ функциясы үчүн баштапкы функция, б. а. $(F(x)+C)'=F'(x)+C'=F'(x)=f(x)$. Мисалы, $f(x)=\cos x$ функциясы үчүн баштапкы функция болуп $\sin x$ гана эмес $\sin x+C$ функциясы да эсептелинет. Себеби $(\sin x+C)' = =(\sin x)'+C'=(\sin x)'=\cos x$.

Баштапкы функцияны табууда төмөнкү теоремалар орун алат.

1-теорема. Кандайдыр бир X аралыгында туундусу нөлгө барабар болгон функция бул аралыкта турактуу болот.

□ Айталы X аралыгындагы бардык чекиттерде $f(x)$ функциясынын туундусу нөлгө барабар, б. а. $f'(x)=0$ болсун. Анда каалагандай $a,b\in X$ чекиттери үчүн Лагранж теоремасы боюнча $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$, $a<c<b$ орун алат. $f'(c)=0$ болгондуктан $f(b)=f(a)$ болот. Бул болсо, аралыктын бардык чекиттеринде функциянын маанисин бирдей, б. а., $f(x)=c$, турактуу дегенди билдирет. □

2-теорема. Эгерде $F(x)$ функциясы кандайдыр бир X аралыгында $f(x)$ үчүн баштапкы функция болсо, анда. $f(x)$ функциясынын бул аралыктагы каалагандай баштапкы функциясы $F(x)+C$ түрүндө жазылат.

□ Айталы $\Phi(x)$ функциясы $f(x)$ үчүн X аралыгындагы башка бир баштапкы функция болсун, б. а. $\Phi'(x)=f(x)$. Анда каалагандай $x\in X$ үчүн $[\Phi(x)-F(x)]'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$. Бул болсо 1-теорема боюнча $\Phi(x)-F(x)$ функциясынын турактуу, б. а. $\Phi(x)-F(x)=C$ турактуу экендигин билдирет да, андан $\Phi(x)=C+F(x)$ келип чыгат. □

2-аныктама. Эгерде $F(x)$, $f(x)$ функциясы үчүн X аралыгындагы баштапкы функциясы болсо, анда $F(x)+C$, функцияларынын көптүгү $f(x)$ функциясынан алынган **анык эмес интегралы** деп аталат жана

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

түрүндө жазылат.

Мында $f(x)$ – **интеграл алдындагы функция**, $f(x)dx$ – **интеграл алдындагы туюнтма**, ал эми x-**интегралдоо өзгөрүлмөсү** деп аталышат.

Туундусу боюнча берилген функцияны табуу же интеграл алдындагы туюнтма боюнча анык эмес интегралды табуу берилген функцияны **интегралдоо** деп аталат.

Интегралдоо дифференцирлөөгө тескери операция. Интегралдоо туура аткарылгандыгын текшерүү үчүн алынган жыйынтыкты дифференцирлөө керек. Ошондо интеграл алдындагы функция келип чыкса, анда интегралдоо туура аткарылган болот.

♦ Мисалдар.

1. $\int 3x^2dx=x^3+C$, себеби $\left(x^3+C\right)'=3x^2$.

2. $\int cosxdx=\sin x+C$, себеби $(\sin x+C)'=\cos x$.

3. $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$, себеби $(\ln|x|+C)'=\frac{1}{x}$.

4. $\int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$, себеби $\left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + C\right)' = e^{-2x}$.

§2. Анык эмес интегралдардын негизги касиеттери

Анык эмес интегралдардын аныктамасынан анын төмөнкү касиеттери келип чыгат:

1^0. Анык эмес интегралдан алынган туунду интеграл алдындагы функцияга барабар; анык эмес интегралдан алынган дифференциал интеграл алдындагы туюнтмага барабар $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ жана $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

Эгерде дифференциал белги интеграл белгиден мурда келсе, анда ал эки белги кыскарышып, интеграл алдындагы туюнтма калат.

$$\square \qquad \left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x);$$

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = (F(x)+C)' dx = F'(x)dx = f(x)dx. \quad \square$$

2^0. Кандайдыр бир функциянын дифференциалынан алынган анык эмес интеграл бул функция менен турактуу чоңдуктун суммасына барабар, б. а.

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Эгерде дифференциал белги интеграл белгиден кийин келсе, анда ал эки белги да кыскарышып, интеграл алыдындагы функцияга турактуу C чоңдугу кошулуп жазылат.

$\square$ $dF(x) = F'(x)dx$, анда $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$. $\square$

3^0. Турактуу көбөйтүүчүнү интеграл белгисинин алдына чыгарууга болот, б. а., эгерде κ-турактуу болсо, анда

$$\int \kappa f(x)dx = \kappa \int f(x)dx, \quad (\kappa \neq 0).$$

$\square$ Алдыңкы барабардыктын эки жагынан дифференциал алсак, анда

$$d\left(\int \kappa\, f(x)dx\right) = \kappa\, f(x)dx,$$

$$d\left(\kappa \int f(x)dx\right) = \left(\kappa \int f(x)dx\right)' dx = \kappa\, f(x)dx. \quad \square$$

Демек, дифференциалдар барабар болгондуктан, алар турактуу чоңдукка гана айырмаланат.

4^0. Эки функциянын алгебралык суммасынан алынган анык эмес интеграл, ал функциялардын анык эмес интегралдарынын суммасына барабар, б. а.

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

□ Айталы $F(x)$ жана $G(x)$ функциялары тиешелүү түрдө $f(x)$ жана $g(x)$ үчүн баштапкы функциялар болушсун: $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$. Анда $F(x) \pm G(x)$ функциясы $f(x) \pm g(x)$ үчүн баштапкы функция болот. Демек

$$\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = [F(x) + C_1] \pm [G(x) + C_2] = [F(x) \pm G(x)] + [C_1 + C_2] = [F(x) \pm G(x)] + C =$$

$$= \int (f(x) + g(x))dx. \quad □$$

Бул касиет каалагандай чектүү сандагы кошулуучулардан турган функциялар үчүн да орун алат.

Негизги интегралдардын таблицасы

Негизги интегралдардын таблицасын келтиребиз. Бул таблицадагы функциялардын айрымдары интегралдын аныктамасынан келип чыгат. Калган функциялардын тууралыгын дифференцирлөө жолу менен текшеребиз.

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1,$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$
3. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C,$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, 0 < a \neq 1,$
6. $\int e^x dx = e^x + C,$
7. $\int \sin xdx = -\cos x + C,$
8. $\int \cos xdx = \sin x + C,$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C,$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C,$
11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + k}\right| + C, a \neq 0,$
13. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C,$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arc\sin \frac{x}{a} + C,$
15. $\int \sin mxdx = -\frac{1}{m} \cos mx + C,$
16. $\int \cos mxdx = \frac{1}{m} \sin mx + C,$
17. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C,$
18. $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C.$

§3 Өзгөрүлмөлөрдү алмаштыруу ыкмасы

1. **Түздөн-түз интегралдоо**. Жөнөкөй интегралдардын таблицасын жана анык эмес интегралдардын негизги касиеттерин пайдаланып, интегралдарды эсептөө **түздөн-түз интегралдоо** деп аталат.

1-мисал.
◊

$$\int\left(5\cos x+2-3x^2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2+1}\right)dx=5\int\cos x dx+2\int dx-3\int x^2dx+\int\frac{dx}{x}-4\int\frac{1}{x^2+1}dx=$$

$$=5\sin x+2x-x^3+\ln|x|-4\,arctgx+C \ ◊$$

2-мисал.

$$◊ \int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2dx=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx=\int(1+\sin x)dx=$$

$$=\int dx+\int\sin dx=x-\cos x+C \ ◊$$

3-мисал.

$$◊ \ \int tg^2dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=$$

$$=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int dx=tgx-x+C \ ◊$$

2. **Өзгөрүлмөлөрдү алмаштыруу ыкмасы.** Көпчүлүк учурда жаңы интегралдоо өзгөрүлмөсүн киргизүү менен берилген интегралды таблицалык интегралга алып келет. Мындай ыкма **өзгөрүлмөлөрдү алмаштыруу же подстановкалар** ыкмасы деп аталат. Ал төмөнкү теоремага негизделген.

1-теорема. Айталы $x=\varphi(t)$ функциясы кандайдыр бир T аралыгында аныкталган жана дифференцирленүүчү функция болсун. Ал эми $f(x)$ функциясы аныкталган X көптүгү $\varphi(t)$ функциясынын маанилеринин көптүгү болсун. Анда, эгерде $f(x)$ функциясы X көптүгүндө баштапкы функцияга ээ болсо, анда T көптүгүндө төмөнкү формула орун алат.

$$\int f(x)dx\,\Big|_{x=\varphi(t)}=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\,. \qquad (3.1)$$

□ Айталы $F(x)$ функциясы $f(x)$ үчүн X көптүгүндөгү баштапкы функция болсун. T көптүгүндөгү $F[\varphi(t)]$ татаал функциясын карайбыз. $F'(x)=f(x)$ экендигин эске алып жана татаал функцияны дифференцирлөө эрежеси боюнча төмөнкүгө ээ болобуз:

$(F[\varphi(t)])' = F_x'[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$, б. а. $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ функциясы T көптүгүндө $F[\varphi(t)]$ баштапкы функциясына ээ болот. Анда $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] + C$ барабардыгынан $F[\varphi(t)] + C = (F(x)+C)\big|_{x=\varphi(t)} =$
$= \int f(x)dx\ \big|_{x=\varphi(t)}$ экендигин эске алсак (3.1) формуласына ээ болобуз □

(3.1) – формула **анык эмес интегралдарда өзгөрүлмөлөрдү алмаштыруу** формуласы деп аталат.

4-мисал. $\int \frac{x^3}{(x-1)^2}dx$ интегралын эсептегиле.

◊ $x-1=t$ деп белгилейли. Анда $x=t+1$ мындан $dx=dt$ жана (3.1)-формуласы боюнча

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2}dx = \int \frac{(t+1)^3}{t^2}dt = \int \frac{t^3+3t^2+3t+1}{t^2}dt = \int\left(t+3+\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt =$$
$$= \frac{1}{2}t^2 + 3t + 3\ln|t| - \frac{1}{t} + C.$$

Кайрадан x өзгөрүлмөсүнө өтсөк төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2}dx = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C \ ◊$$

Эскертүү: Анык эмес интегралдарда өзгөрүлмөдү алмаштырууда, айрым учурда x ти t дан функция эмес, тескерисинче t ны x тен функция катары берүү ыңгайлуу болот.

5-мисал. $\int \frac{x^4dx}{x^5+7}$ интегралын эсептегиле.

◊ $x^5+7=t$ деп белгилейбиз. Анда $dt=5x^4dx$ болот.

$$\int \frac{x^4dx}{x^5+7} = \frac{1}{5}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{5}\ln|t| + C \text{ же}$$
$$\int \frac{x^4}{x^5+7}dx = \frac{1}{5}\ln|x^5+7| + C \ ◊$$

Подстановкаларды туура эмес тандоо белгилүү бир кыйынчылыктарга алып келет. Аны жеңилдетүү үчүн дифференцирлөө техникасына ээ болуу жана таблицалык интегралдарды жакшы билүү зарыл.

6-мисал. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$ интегралын эсептегиле

◊ $\sqrt{x^2+a}+x=t$ деп белгилейбиз. Мындан $dt=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}+1\right)dx$ келип чыгат. Демек,

$$dx = \frac{\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}+x}dt$$

га ээ болобуз.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\sqrt{x^2+a}+x\right|+C\ \Diamond$$

7-мисал. $\int\frac{xdx}{(x^2+1)^n}, n\neq 1$ интегралын эсептегиле.

$\Diamond$ $x^2+1=t$ деп белгилейбиз. Анда $dt=2x\,dx$ жана

$$\int\frac{xdx}{(x^2+1)^n}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^n}=\frac{1}{2}\frac{1}{n-1}\frac{1}{t^{n-1}}+C=-\frac{1}{2(n-1)}\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}+C.$$

$n=1$ болгондо $\int\frac{xdx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$ болот $\Diamond$

8-мисал. $\int\sin^n x\cos xdx$ интегралын эсептегиле.

$\Diamond$ $t=\sin x$ деп белгилейбиз. Анда $dt=\cos x\,dx$ жана

$$\int\sin^n x\cos xdx=\int t^n dt=\begin{cases}\frac{t^{n+1}}{n+1}+C=\frac{\sin^{n+1}}{n+1}, n\neq -1\\ \ln|t|+c=\ln|\sin x|+C, n=-1\end{cases}\ \Diamond$$

Анык эмес интегралды чыгарууда өтө чоң мааниге ээ болуучу төмөнкү эрежеге токтололу:

Эгерде

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

болсо, анда

$$\int f(ax)dx=\frac{1}{a}F(ax)+C \qquad (*)$$

орун алат.

□ Чындыгында эле оң жана сол жактарын дифференцирлесек, анда

$$\left(\int f(ax)dx\right)'=f(ax),$$

$$\left(\frac{1}{a}F(ax)+C\right)'=\frac{1}{a}\Big(F(ax)\Big)'=\frac{1}{a}F'(ax)a=F'(ax)=f(ax),$$

туундулары барабар болду. Бул (*) барабардыктын туура экендигин далилдейт, анда аны

$$\int f(ax)dx=\frac{1}{a}\int f(ax)d(ax)=\frac{1}{a}F(ax)+C,$$

түрүндө жазууга болот. □

2.Эгерде

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

болсо, анда

$$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C,$$

анда аны

$$\int f(x+b)dx = \int f(x+b)d(x+b) = F(x+b) + C$$

түрүндө жаза алабыз.

3. Эгерде

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

болсо, анда

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,$$

бул учурда да аны

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,$$

түрүндө жаза алабыз.

Мисалдар.

1. $\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C.$

2. $\int \cos 7x dx = \frac{1}{7}\int \cos 7x d(7x) = \frac{1}{7}\sin 7x + C$

3. $\int \sin(2x-6)dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x-6)d(2x-6) = -\frac{1}{2}\cos(2x-6) + C$

4. Эгерде

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C,$$

болсо, анда

$$\int \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)} = \int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)| + C.$$

Мисалдар.

1. $\int tgx dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\sin x} = -\ln|\cos x| + C$,

2. $\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$,

3. $\int ctgx dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$

§4. Бөлүктөп интегралдоо ыкмасы

Бөлүктөп интегралдоо ыкмасы эки функциянын көбөйтүндүсүн дифференцирлөө формуласын пайдаланууга негизделген.

Эгерде $u=u(x)$ жана $v=v(x)$ функциялары кандайдыр бир X көптүгүндө дифференцирленүүчү болушса, анда

$$(uv)' = u'v + v'u,$$

формуласы орун алаарын билебиз. Мындан $u\cdot v$ функицясы $u'v+v'u$ суммасына баштапкы функция болору келип чыгат. Ошондуктан

$$\int(u'v+v'u)dx = uv + C,$$

же

$$\int vu'dx + \int uv'dx = uv + C.$$

Ушул барабардыктагы $u'dx = du$, $v'dx = dv$ экенин эске алсак, анда

$$\int vdu + \int udv = uv + C,$$

же

$$\int udv = uv - \int vdu + C.$$

Мында C турактуу чоңдугун $\int vdu$ интегралына киргизсек (ал интегралда да турактуу чоңдук бар) жыйынтыгында

$$\int udv = uv - \int udv \qquad (4.1)$$

формуласын алабыз. Бул формула udv интегралын эсептөөнү жөнөкөй болгон $\int vdu$ интегралын эсептөөгө алып келет.

1-мисал.

$$\lozenge\ \int arctgx dx = \left| \begin{matrix} u = arctgx; du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx; v = x \end{matrix} \right| = xarctgx - \int x\frac{dx}{1+x^2} = xarctgx - \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{1+x^2} =$$

$$= xarctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \ \lozenge$$

2-мисал.

$$\lozenge\ \int xe^x dx = \left| \begin{matrix} u = x; du = dx \\ dv = e^x dx; v = e^x \end{matrix} \right| = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C \ \lozenge$$

3-мисал.

$$\lozenge\ \int x\ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x; du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = xdx; v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int\frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C \ \lozenge$$

Айрым интегралдарды эсептөөдө бөлүктөп интегралдоо формуласын бир нече жолу колдонууга туура келет.

4-мисал.

$$\Diamond \int x^2\cos x dx = \left| \begin{matrix} u=x^2; du=2xdx \\ dv=\cos x dx; v=\sin x \end{matrix} \right| = x^2\sin x - 2\int x\sin x dx = \left| \begin{matrix} u=x; du=dx \\ dv=\sin x dx; v=-\cos x \end{matrix} \right| =$$

$$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x dx = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C \ \Diamond$$

Акырында $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ интегралын эсептейли.

. ◊ Эгерде $n=1$ болсо таблицалык интегралга ээ болобуз: $I_1 = arctgx + C$.

Айталы $n>1$ болсун. Алымындагы 1ди $(x^2+1)-x^2$ айырмасы түрүндө жазсак, $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^n}$ түрүнө келет. Экинчи интегралга бөлүктөп интегралдоо ыкмасын колдонолу:

$$u=x; du=dx; dv=\frac{xdx}{(x^2+1)^n}, v=\int \frac{xdx}{(x^2+1)^n} = -\frac{1}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}}$$

(§3, 7-мисал боюнча). Анда $I_n = I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}$,

Мындан

$$I_n = I_{n-1} + \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2}I_{n-1},$$

$$I_n = \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}$$

Демек I_n интегралы I_{n-1} аркылуу туюнтулду:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-2}{2n-2}\int \frac{dx}{(x+1)^{n-1}} \quad (n>1) \quad (4.2)$$

ушул түрүндөгү формулалар **рекуренттик формулалар** деп аталышат ◊

5-мисал. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$ интегралын эсептегиле.

◊ (4.2) рекуренттик формуласы боюнча төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}$, ал эми $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = arctgx + C$

Анда

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} arctgx + C \ \Diamond$$

§5. Рационалдык функцияларды интегралдоо

Интегралы ар дайым элементардык функциялар аркылуу туюнтулуучу функциялардын негизги классы болуп рационалдык функциялар, б. а. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ бөлчөгү түрүндө көрсөтүүгө мүмкүн болгон функциялар эсептелишет. Мында $P(x), Q(x)$ - көп мүчөлөр.

Эгерде алымындагы көп мүчөнүн даражасы бөлүмүндөгү көп мүчөнүн даражасынан чоң же барабар болсо, анда $\frac{P(x)}{Q(x)}$, бөлчөгү **буруш рационалдык** болуп, аны дурус рационалдык бөлчөккө келтирүү үчүн алымын бөлүмүнө (көп мүчөнү көп мүчөгө бөлүү эрежеси боюнча) бөлүп,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \qquad (5.1)$$

ээ болобуз. Мында $W(x)$ кандайдыр бир көп мүчө, $R(x)$- болсо $P(x)$ көп мүчөнү $Q(x)$ көп мүчөгө бөлгөндөгү калдык жана $\frac{P(x)}{Q(x)}$ бөлчөгү **дурус рационалдык бөлчөк**.

Мисалдар: 1) $\frac{x^5+x^3-x^2+1}{x^3-2x+1} = x^2+3-\frac{2x^2-6x+2}{x^3-2x+1}$;

2) $\frac{x^3+x+1}{x^2+1} = x + \frac{1}{x^2+1}$.

Эми биз дурус рационалдык бөлчөгүн карайлы.
Дурус рационалдык бөлчөктөр:

I. $\frac{A}{x-a}$;

II. $\frac{A}{(x-a)^k}$ ($k \geq 2$ бүтүн оң сан);

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ (бөлүмүндөгү квадраттык үч мүчөнүн тамыры комплекстүү, б. а. $\frac{p^2}{4} - q < 0$);

IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ ($k \geq 2$, бүтүн оң сан, $\dfrac{p^2}{4}-q<0$).

Мына ушундай бөлчөктөрдү жөнөкөй **дурус рационадык бөлчөктөр** деп айтабыз. Алардын чыгаруу ыкмаларына токтололу:

I. $\displaystyle\int\frac{Adx}{x-a}=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C.$

II. $\displaystyle\int\frac{A}{(x-k)^k}dx=A\int(x-a)^{-k}d(x-a)=A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C=$

$$=\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C$$

III. $\displaystyle\int\frac{Ax+b}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+$

$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}==\frac{A}{2}\ln|x^2+px+q|+$$

$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=\frac{A}{2}\ln|x^2+px+q|+$$

$$+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Акыркы интегралды чыгарууда

$$x+\frac{p}{2}=t,\quad x=t-\frac{p}{2},\quad dx=dt;\ q-\frac{p^2}{4}=a^2,$$

белгилөөлөрдү киргизип, биз таблицалык интегралга $\displaystyle\int\frac{dt}{t^2+a^2}$ келтирип чыгардык. Эми биз акыркы 4 бөлчөктү чыгаралы, анын чыгарылышы бир аз татаалыраак.

IV. $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^k}dx=$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}\qquad(**)$$

Биринчи интегралга $x^2+px+q=t$, алмашуусун алсак, анда $(2x+p)dx=dt$

болот да

$$\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx=\int\frac{dt}{t^k}=\int t^{-k}dt=\frac{t^{-k+1}}{-k+1}+C=\frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}}+C$$

Экинчи интегралды I_k менен белгилеп, өзгөртүп түзөлү,

$$I_k=\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}=\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^k}=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k},$$

биз, мында дагы $x+\frac{p}{2}=t,\ dx=dt,\ q-\frac{p^2}{4}=a^2$ (Себеби берилиши боюнча

$\frac{p^2}{4}-q<0$, анда $q-\frac{p^2}{4}>0$ ошондуктан аны a^2 белгиледик).

$$I_k=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{a^2}\int\frac{\left(t^2+a^2\right)-t^2}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}-\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}. \qquad (***)$$

Акыркы интегралды өзгөртүп түзөлү

$$\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}=\left|\begin{matrix}u=t,\ du=dt\\ dv=\dfrac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^k},\ v=-\dfrac{1}{2(k-1)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{1}{2(k-1)}\left[\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}-\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}\right]$$

Ушул алынган маанини (***) коюп,

$$I_k=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}+\frac{1}{a^2}\frac{1}{2(k-1)}\left[\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}-\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}\right]=$$

$$=\frac{t}{2a^2(k-1)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2a^2(k-1)}\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}.$$

Эң акыркы интегралды биз §4 чыгарганбыз ((4.2) формуланы кара).

Эми биз жалпы дурус рационалдык бөлчөктөрдүн интегралданышына токтололу.

1-теорема. Эгерде $\frac{P(x)}{Q(x)}$ рационалдык функциясында алымындагы көп мүчөнүн даражасы бөлүмүндөгү көп мүчөнүн даражасынан төмөн болсо жана $Q(x)$ көп мүчөсү

$$Q(x)=(x-\alpha)(x-\alpha)^2\text{K}\,(x-\alpha)^r\,\text{K}\,\left(x^2+px+q\right)\text{K}\,\left(x^2+px+q\right)^l,$$

көбөйтүүчүлөргө ажыраса, анда $\frac{P(x)}{Q(x)}$ рационалдык функциясын төмөнкү көрүнүштө көрсөтүүгө болот

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)}+\text{K}+\frac{A_r}{(x-a)^r}+\text{K}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\text{K}+\frac{M_lx+N_l}{\left(x^2+px+q\right)^l}, \qquad (5.2)$$

$A_1, A_2, \ldots, A_r, \ldots, M_1, N_1, \ldots, M_l, N_l$-кандайдыр бир чыныгы сандар. (5.2) - туюнтмасы **рационалдык функциянын элементардык бөлчөктөргө ажыралышы** деп аталат.

$A_1, A_2, \ldots, A_r, \ldots, M_1, N_1, \ldots, M_l, N_l$ белгисиздерин аныктоо үчүн (5.2) ажыралыштын эки жагын тең $Q(x)$ ка көбөйтөбүз. Алынган туюнтмадан x тин бирдей даражасын кармаган коэффициенттерин барабарлап, биринчи даражадагы теңдемелер системасына ээ болобуз. Ошол системадан белгисиз $A_1, A_2, \ldots, A_r, \ldots, M_1, N_1, \ldots, M_l, N_l$ сандарын таап алууга болот.

Рационалдык функциянын ажыралышынан белгисиз коэффициенттерди табуу ыкмасы **белгисиз же анык эмес коэффициенттер ыкмасы** деп аталат.

1-мисал. $\dfrac{2x-1}{x^2-5x+6}$ рационалдык функциясын элементардык бөлчөктөргө ажыраткыла.

◊ $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$ болгондуктан (5.2) формуласы боюнча $\dfrac{2x-1}{x^2-5x+6}=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{x-2}$ ээ болобуз. Бул теңдеменин эки жагын тең x^2-5x+6 га көбөйтсөк $2x-1=A(x-2)+B(x-3) \Rightarrow 2x-1=(A+B)x-2A-3B$ келип чыгат, x тин бирдей даражасын кармаган коэффициенттерди барабарласак төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 2A+3B=1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} A=5 \\ B=-3 \end{matrix}$$

Демек,

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{5}{x-3}-\frac{3}{x-2},$$

бөлчөктөрүнө ажырайт. Бул бөлчөктөр I түрдөгү бөлчөктөр болуп саналат.

Биз алдыда

$$2x-1=A(x-2)+B(x-3)$$

теңдештигин алдык. A жана B коэффициенттерин аныктоонун дагы бир жолу: ушул теңдештикке биринчи бөлчөктүн бөлүмүн нөлгө барабарлап $x-3=0, x=3$ койсок, анда $5=A$, $A=5$ коэффициентин табабыз. Ушундай эле экинчи бөлчөктүн бөлүмүн $x-2=0, x=2$ койсок, $3=-B$, $B=-3$ маанисине ээ болот элек. Бул ыкма качан гана $Q(x)$ көп мүчөсү ар түрдүү чыныгы тамырга ээ болгон учурунда колдонулат.

2-мисал. $\dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$ рационалдык функциясынын элементардык бөлчөктөрдүн суммасына ажыраткыла.

◊ x^2+1 квадраттык үч мүчөсү чыныгы тамырга ээ эмес, ошондуктан (5.2) формуласы боюнча төмөнкүгө ээ болобуз: $\frac{x^2+1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$. Эки жагын тең $x(x^2+1)^2$ ка көбөйтбүз:

$$x^2-1=A(x^2+1)+(Bx+C)(x^2+1)x+(Dx+E)x$$

же

$$x^2-1=(A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A.$$

x тин бирдей даражасын кармаган коэффициенттерди барабарласак төмөнкү системага ээ болобуз:

$$\begin{cases} x^4: & A+B=0 \\ x^3: & C=0 \\ x^2: & 2A+B+D=1 \\ x^1: & C+E=0 \\ x^0: & A=-1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \\ C=0 \\ D=2 \\ E=0 \end{cases}$$

Ошондуктан изделүүчү ажыралыш $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=-\frac{1}{x}+\frac{2x}{(x^2+1)^2}$. түрүндө жазылат да, алдыңкы I,IV түрдөгү бөлчөктөргө ээ болобуз.

Ушул мисалдардан көрүнүп тургандай (5.1) рационалдык функциясын интегралдоо маселеси таблицалык интеграл болуп эсептелген $W(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+...a_m$ көп мүчөсүнө жана дурус рационалдык бөлчөктөрүн интегралдоого алып келет (жогорку төрт бөлчөктөрдүн суммасына) ◊

3-мисал. $\int\frac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x}dx$ интегралын тапкыла.

◊ $x^3+2x^2-8x=x(x+4)(x-2)$ болгондуктан

$$\frac{x^2+2x+2}{x^3+2x^2-8x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+4}+\frac{C}{x-2}$$

$$x^2+-2x+2=A(x+4)(x-2)+B(x-2)x+C(x+4)x$$

$$x^2-2x+2=(A+B+C)x^2+(2A-2B+4C)x-8A;$$

$$\begin{cases} x^2: & A+B+C=1 \\ x^1: & 2A-2B+4C=-2 \\ x^0: & -8A=2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} A=-\frac{1}{4} \\ B=\frac{13}{12} \\ C=\frac{1}{6} \end{cases}$$

Анда

$$\int\frac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x}dx=-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}+\frac{13}{12}\int\frac{dx}{x+4}+\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x-2}=-\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{13}{12}\ln|x+4|+$$

$$+\frac{1}{6}\ln|x-2|+C$$

Алдыдагы ыкма боюнча

$$x^2-2x+2=A(x+4)(x-2)+B(x-2)x+C(x+4)x,$$

Теңдештигине

$$x=0 \text{ болсо, } A=-\frac{1}{4}$$

$$x=-4 \text{ болсо, } B=\frac{13}{12}$$

$$x=2 \text{ болсо, } C=\frac{1}{6}$$

Ошол эле маанилерге ээ болобуз ◊

§6. Айрым иррационалдык функцияларды интегралдоо

Эми айрым жөнөкөй иррационалдык функциялардан алынган интегралдарды карайлы. Бул интегралдар рационалдык функциялардан алынган интегралдарга келтириле тургандыгын жана §5 пайдаланылган ыкмалардын жардамында табыларын көрсөтөбүз.

1. $\int R\left(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ **түрүндөгү интеграл**. Мында a,b,c,d - кандайдыр бир анык сандар $\left(\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}\right)$; m - натуралдык сан.

Бул түрдөгү интеграл $t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ подстановкасы аркылуу рационалдык фунциядан алынуучу интегралга келтирилет, б. а. рационалдаштырылат.

Чындыгында $t^m=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow x=\frac{b-dt^m}{ct^m-a};\Rightarrow dx=\frac{mt^{m-1}(ad-bc)}{(ct^m-a)^2}dt$,

болгондуктан,

$$\int R\left(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=\int R\left(\frac{b-dt^m}{ct^m-a},t\right)\frac{mt^{m-1}(ab-bc)}{(ct^m-a)^2}dt=\int R_1(t)dt$$

болот.

$R_1(t)$ бул t аргументтүү рационалдык функция.

1-мисал. $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{dx}{1-x}$ интегралын эсептегиле.

$$◊\ t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\Rightarrow t^2=\frac{1+x}{1-x}\Rightarrow 1-x=\frac{2}{t^2+1}\Rightarrow x=\frac{t^2-1}{t^2+1};\ dx=\frac{4tdt}{(t^2+1)^2}.$$

Демек,

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{dx}{1-x}=2\int\frac{t^2dt}{(t^2+1)}=2\int\frac{t^2+1-1}{(t^2+1)}dt=2\int dt-2\int\frac{dt}{t^2+1}=2t-2arctgt+C=$$

$$=2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-2arctg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C \ \Diamond$$

2-мисал. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ интегралын эсептегиле.

$\Diamond$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int\frac{dx}{\left(\sqrt[6]{x}\right)^2+\left(\sqrt[6]{x}\right)^3}=\left\{\begin{matrix}t=\sqrt[6]{x};\ x=t^6\\ dx=6t^5dt\end{matrix}\right\}=\int\frac{6t^5dt}{t^2+t^3}=6\int\frac{t^3dt}{1+t}=6\int\left(t^2-t+1\right)dt-$$

$$-6\int\frac{dt}{1+t}=6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t\right)-6\ln|t+1|+C=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C \ \Diamond$$

Иррационалдык туюнтмаларды интегралдоонун негизги максаты тамыр белгисинен кутулуу болуп саналат. Ал үчүн, ошол тамыр белгисин кутулта турган алгебралык жана тригонометриялык подстановкаларды тандоо зарыл. Тригонометриялык подстановкалар квадраттык тамыр алдындагы туюнтмалардан көз каранды. Мисалы:

$\sqrt{a^2-x^2}$ түрүндөгү туюнтмага $x=a\sin t$ же $x=a\cos t$;

$\sqrt{a^2+x^2}$ түрүндөгүгө болсо $x=atgt$;

$\sqrt{x^2-a^2}$ түрүндө болуп калса $x=\frac{a}{\cos t}$,

подстановкаларын алуу ылайыктуу.

2. $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ **түрүндөгү интеграл.**

Мында a,b,c - кандайдыр бир чыныгы сандар: $a\neq 0$.

Эгерде ax^2+bx+c үч мүчөсү $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$ тамырларына ээ жана $a>0$ болсо анда $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=|x-x_1|\sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}$

болот эле жана $R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)=R\left(x,|x-x_1|\sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}\right)=$

$=R_1\left(x,\sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}\right)$, б. а. биринчи пунктта каралган интегралга ээ болобуз.

Эгерде $x_1=x_2$ болсо, анда $\sqrt{ax^2+bx+c}=|x-x_1|\sqrt{a}$, б. а., интеграл белгисинин алдында x тен көз каранды болгон рационадык функция жайланышат.

Эгерде ax^2+bx+c үч мүчөсү чыныгы тамырга ээ эмес жана $a>0$ болсо, анда интеграл төмөндөгү **Эйлер подстановкасы** аркылуу рационалдаштырылат:

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a} \tag{6.1}$$

Мындан $bx+C=t^2-2\sqrt{a}\,tx \Rightarrow x=\dfrac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b}$; $\sqrt{ax^2+bx+c}=\dfrac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b}$

$$dx=2\,\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b}dt;$$

Ошентип

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b},\ \frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b}\right)2\,\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b}dt=\int R_1(t)dt$$

Мында $R_1(t)$- бул tдан көз каранды болгон рационалдык функция.

Эгерде ax^2+bx+c көп мүчөсүндө $a<0$, $c>0$ болсо, анда интегралды рационалдаштыруу үчүн Эйлердин экинчи подстановкасын пайдаланууга болот: $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$.

3-мисал. $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$ интегралын эсептегиле.

◊ x^2+x+1 көп мүчөсү чыныгы тамырга ээ болбогондуктан $\sqrt{x^2+x+1}=t-x$ подстановкасын пайдаланабыз.

Мындан $x^2+x+1=t^2-2tx+x^2 \Rightarrow x=\dfrac{t^2-1}{1+2t}$; $dx=\dfrac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}dt$ болот. Анда $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=2\int\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}dt$ рационалдык функциядан алынган интегралга ээ болобуз.

$$\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}=\frac{A}{t}+\frac{B}{(1+2t)}+\frac{D}{(1+2t)^2}$$

$$2t^2+2t+2=A(1+2t)^2+Bt(1+2t)+Dt \Rightarrow 2t^2+2t+2=(4A+4B)t^2+(4A+B+D)t+A$$

t нын бирдей даражаларын кармаган коэффициенттерди барабарлап төмөнкү системага ээ болобуз:

$$\begin{cases}4A+2B=2\\4A+D+B=2\\A=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2\\B=-3\\D=-3\end{cases}$$

Анда

$$\frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2}dt=\frac{2}{t}-\frac{3}{(1+2t)}-\frac{3}{(1+2t)^2}$$

болот.

Демек,

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\int\left(\frac{2}{t}-\frac{3}{(1+2t)}-\frac{3}{(1+2t)^2}\right)dt=2\int\frac{dt}{t}-3\int\frac{dt}{(1+2t)}-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{(1+2t)^2}=$$

$$=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|1+2t|+\frac{3}{2(1+2t)}+C=2\ln\left|x+\sqrt{x^2+x+1}\right|-\frac{3}{2}\ln\left|1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right|+$$

$$+\frac{3}{2\left(1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right)}+C\ \lozenge$$

4-мисал. $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$ интегралын эсептегиле.

$\lozenge$ Мында $1+x-x^2$ үч мүчөсү чыныгы тамырга ээ эмес жана $a<0$, $c>0$. Ошондуктан $\sqrt{1+x-x^2}=tx-1$ подстановкасын пайдаланабыз. Анда $1+x-x^2=t^2x^2-2tx+1 \Rightarrow 1-x=t^2x-2t$;

$$x=\frac{1+2t}{t^2+1}\Rightarrow dx=\frac{2\left(1-t-t^2\right)2}{\left(t^2+1\right)}dt;\ \sqrt{1+x-x^2}=\frac{t^2+t-1}{t^2+1}.$$

Ошентип,

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}=\int\frac{2\left(1-t+t^2\right)}{\left(1+\dfrac{1+2t}{t^2+1}\right)\dfrac{t^2+t-1}{t^2+1}\left(t^2+1\right)^2}dt=-2\int\frac{dt}{1-(t+1)^2}=$$

$$=-2\,arctg(t+1)+C=-2\,arctg\frac{\sqrt{1+x-x^2}+1+x}{x}+C\ \lozenge$$

Эскертүү. Эгерде $a>0$, $c>0$ болушса, анда Эйлердин биринчи подстановкасын колдонуу ыңгайлуу.

§7. Айрым тригонометриялык жана трансценденттик функцияларды интегралдоо

1. $\int R(\sin x,\cos x)dx$ **түрүндөгү интегралын** карайбыз. Бул интеграл $t=tg\frac{x}{2}$; $-\pi<x<\pi$, подстановкасы аркылуу рационалдык түргө келтирилет.

Чындыгында $\sin x=\frac{2tg(x/2)}{1+tg^2(x/2)}=\frac{2t}{1+t^2}$;

$$\cos x=\frac{1-tg^2(x/2)}{1+tg^2(x/2)}=\frac{1-t^2}{1+t^2};\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Анда $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt$. Каралган $t = tg\frac{x}{2}$ подстановкасын **универсалдык** подстановка деп аташат, себеби каралган типтеги ар кандай интегралдар сөзсүз айтылган подстановка аркылуу рационалдык түргө келтирилет. Бирок, кээ бир учурларда ал универсалдык подстановка көбүрөөк аракетти талап кылат. Ушул анын жетишсиздиги. Ошондуктан, универсалдык подстановка башка подстановкаларды колдонууга мүмкүн болбогон учурларда гана колдонууга болот. Ал эми интеграл алдындагы бөлчөктүн бөлүмүндө $a\sin x + b\cos x + c$ түрүндө туюнтмалар болсо (a, b, c турактуу сандар), анда сөзсүз универсалдык подстановканы колдонуудан баштоо зарыл.

Көпчүлүк учурларда элементардык математикадан белгилүү болгон:

а)Негизги тригонометриялык теңдештиктер:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha};$$

б) Көбөйтүүчүлөрдү суммага өзгөртүп, түзүү:

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)];$$

в) Тригонометриялык функциялардын даражаларын кичирейтүү формуласы:

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha,$$

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha;$$

г)Кош аргументүү тригонометриялык функциялардын формулалары:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha},$$

$$ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha};$$

формулалар тригонометриялык туюнтмаларды интегралдоого өтө чоң жардам берет.

1-мисал. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ интегралын эсептегиле.

◊ $t = tg\frac{x}{2}$ подстановкасын колдонобуз. $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$;

$$x = 2arctg\, t;\ dx = \frac{2dt}{1+t^2};$$

Демек $\int \frac{dt}{1+\sin x} = 2\int \frac{dt}{1+t} + C = -\frac{2}{1+t} + C = -\frac{2}{1+tg\left(\frac{x}{2}\right)} + C$ ◊

Эгерде $R(u,v)$ функциясы же өзгөрмөлөрүнүн бири боюнча жуп же так болсо, анда интегралды рационалдаштыруу үчүн башка да подстановкаларды колдонууга болот.

Демек, эгерде $R(u,v)$- бөлүмү u алымы v өзгөрүлмөлөрү боюнча көп мүчө болушкан бөлчөк болсо жана $R(-u,v) = -R(u,v)$, б. а. u өзгөрүлмөсү боюнча так болсо, анда $\int R(\sin x, \cos x)dx$ интегралын рационалдаштыруу үчүн $t = \cos x$ подстановкасы пайдаланылат.

2-мисал. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$ интегралын эсептегиле.

◊ Берилген учурда $R(u,v) = \frac{u^3}{v^4};\ R(-u,v) = -R(u,v)$

$$\cos x = t = dt = -\sin x dx.$$

Анда

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx = -\int \frac{1-t^2}{t^4}dt = -\int t^{-4}dt + \int t^{-2} = \frac{t^{-3}}{3} - t^{-1} + C = \frac{1}{3}\frac{1}{\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C \ ◊$$

3-мисал. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$ интегралын эсептегиле.

◊ Бул учурда $R(u,v) = u^2v^3, t = \sin x$, деп белгилейбиз. Анда $dt = \cos x dx$ жана

$$\int \sin^{2x} \cos^3 x dx = \int t^2(1-t^2)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{x} + C \ ◊$$

4-мисал. $\int \sin 3x \cos 5x dx$ интегралын эсептегиле.

◊ $\int \sin 3x \cos 5x dx = \frac{1}{2}\int(\sin 8x - \sin 2x)$ болгондуктан

$$\int \sin 3x \cos 5x dx = \frac{1}{2}\int \sin 8x dx - \frac{1}{2}\sin dx = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + C \ \lozenge$$

2. $\int R(e^x)dx$ – **түрүндөгү интегралдар**. Бул интегралдар $t = e^x$ подстановкасы аркылуу рационалдаштырылат.

$t = e^x \Rightarrow x = \ln t \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$. Анда $\int R(e^x)dx = \int R(t)\frac{dt}{t}$, мында $R(t)$ - рационалдык функция.

5-мисал. $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}dx$ интегралын эсептегиле.

$\lozenge$ $t = e^x \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$

Мында

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}dx = \int \frac{t-1}{t+1}\frac{dt}{t} = \int \frac{2t - (t+1)}{(t+1)t}dt = 2\int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{dt}{t} = 2\ln|t+1| - \ln|t| + C =$$

$$= 2\ln(1 + e^x) - x + C \ \lozenge$$

§8. Элементардык функциялар аркылуу туюнтулбаган интегралдар жөнүндө түшүнүк

Дифференцирлөөнүн негизги эрежелеринен каалагандай элементардык функциялардын туундусу да элементардык функция болоору келип чыгат. Баштапкы функцияны табуу операциясы мындай касиетке ээ эмес, б. а., баштапкы функциясы элементардык функция болбогон элементардык функциялар да кездешет. Буларга тиешелүү келген интегралдар **элементардык функциялар аркылуу туюнтулбаган интегралдар** деп, ал эми мындай функциялар - чектүү түрдө интегралданбоочу функциялар деп аталышат.

Мисалы, $\int e^{-x^2}dx$; $\int \sin x^2 dx$; $\int \cos x^2 dx$; $\int \frac{\sin x}{x}dx$; $\int \frac{\cos x}{x}dx$; $\int \frac{dx}{\ln x}$ - элементардык функциялар аркылуу туюнтулбайт, б. а., $f'(x) = e^{-x^2}$; $f'(x) = \sin x^2$; ж. б. боло тургандай элементардык функциясы жашабайт.

Мындай интегралдар бул главада каралган ыкмалар менен интегралданбайт. Бул болсо жогорку интегралдарды эсептөө таптакыр мүмкүн эмес дегенди билдирбейт. Аларды интегралдоо жолдорун кийинки главада (даражалуу катардын жакындаштырып эсептөөлөргө колдонулушу) карайбыз.

Көнүгүүлөр.

11.1. $\int\sqrt{x}\,dx$

11.3. $\int\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$

11.2. $\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$

11.4. $\int 10^x dx$

Өзгөрүлмөлөрдү алмаштыруу ыкмасын пайдаланып, интегралды эсептегиле.

11.5. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$

11.6. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

11.7. $\int\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$

11.8. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$

11.9. $\int\sqrt{1+\cos^2 x}\sin 2x\cos x\cos 2x dx$

11.10. $\int\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx$

11.11. $\int\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$

11.12. $\int x^2 e^{2x+1}dx$

Бөлүктөп интегралдоо ыкмасын пайдаланып интегралды эсептегиле.

11.13. $\int x\sin 2x dx$

11.14. $\int x3^x dx$

11.15. $\int x\cos x dx$

11.16. $\int xe^{-x}dx$

11.17. $\int\ln(x^2+1)dx$

11.18. $\int\frac{x^3}{(1+x^2)^2}dx$

11.19. $\int e^x\sin x dx$

11.20. $\int x^2 e^x\sin x dx$

Рационалдык функциялардан алынган интегралды эсептегиле.

11.21. $\int\frac{x}{2x^2-3x-2}dx$

11.22. $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$

11.23. $\int\frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$

11.24. $\int\frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}dx$

11.25. $\int\frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}dx$

11.26. $\int\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2\frac{dx}{x}$

11.27. $\int\frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}dx$

11.28. $\int\frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}dx$

Иррационалдык функциялардан алынган интегралды эсептегиле.

11.29. $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$

11.30. $\int\frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$

11.31. $\int\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$

11.32. $\int\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}dx$

11.33. $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}dx$

11.34. $\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$

Интегралды эсептегиле.

11.35. $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

11.36. $\int x\cos x^2 dx$

11.37. $\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

11.38. $\int\frac{1-tgx}{1+tgx}dx$

11.39. $\int\frac{e^x-1}{e^x+1}dx$

11.40. $\int e^{2x^2+\ln x}dx$

11.41. $\int\frac{1}{\sqrt{x}(x-1)}dx$

11.42. $\int\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$

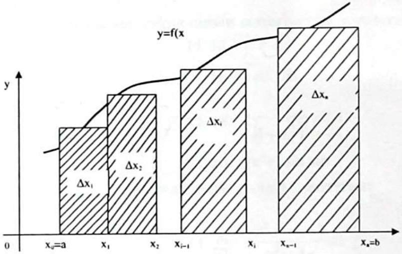
ОН ЭКИНЧИ ГЛАВА
АНЫК ИНТЕГРАЛДАР

§1. Анык интегралдын аныктамасы

Айталы $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде аныкталган жана $a<b$ болсун. Бул кесиндини $a = x_0 < x_1 < x_2 < ...x_{i-1}...x_n = b$ чекиттеринин жардамы менен бөлүктөргө бөлөбүз. $x_0, x_1, ...x_n$ чекиттерин **бөлүү чекиттери** деп атайбыз. Ар бир $[x_{i-1}, x_i]$ бөлүкчө кесиндилеринен $\xi_i(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$ чекиттерин тандап алабыз. $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ аркылуу $[x_{i-1}, x_i]$ бөлүкчө кесиндисинин узундугун белгилейли. Төмөндөгүдөй сумма түзөбүз,

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (1.1)$$

Бул сумма $f(x)$ функциясы үчүн $[a,b]$ кесиндисиндеги **интегралдык**



1.1–чийме

сумма деп аталат. Ал геометриялык жактан төмөндөгүдөй мааниге ээ: негиздери $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ жана бийиктиктери $f(\xi_1), f(\xi_2), ..., f(\xi_n)$ болгон (1.1-чийме) тик бурчтуктардын аянттарынын суммасын билдирет.

Эми λ менен бөлүкчө кесиндилердин узундуктарынын эң чоңун белгилейбиз: $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$.

1-аныктама. Эгерде (1.1) – интегралдык суммасынын $\lambda \to 0$ дагы чектүү I предели жашаса жана ал предел $[a,b]$ сегментинин бөлүкчө кесиндилерге бөлүүдөн, жана ар бир $[x_i, x_{i-1}]$ бөлүкчөдөн ξ_i

чекитин тандап алуудан көз каранды болбосо, анда бул предел $f(x)$ **функциясынан $[a,b]$ кесиндиси боюнча алынган анык интегралы** деп аталат жана

$$I=\int_a^b f(x)dx \text{ же } \int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x \qquad (1.2)$$

түрүндө белгиленет.

Бул учурда $f(x)$ функциясы $[a,b]$ **кесиндисинде интегралдануучу** функция болот, a жана b сандары тиешелүү түрдө интегралдоонун **жогорку жана төмөнкү пределдери** деп аталышат. Ал эми $f(x)$ **интеграл алдындагы функция**, x **интегралдоо өзгөрмөсү**.

Анык интегралдын аныктамасынан (1.2)–интегралдын чоңдугу $f(x)$ функциясынын түрүнөн гана эмес, a жана b сандарынан да көз каранды экендиги көрүнүп турат. Эгерде $f(x)$ функциясы жана интегралдоо пределдери берилсе, анда (1.2) интегралы бир маанилүү аныкталат жана кандайдыр бир санды берет. Мындан анык интеграл интегралдын алдындагы функциянын аргументин тандап алуудан, б. а., интегралдоо өзгөрүлмөсүнүн белгиленишинен көз каранды эмес экендиги келип чыгат. Демек,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(\xi)d\xi, \text{ ж. б.}$$

Анык интегралдын **геометриялык мааниси**:

Эгерде $y=f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде терс эмес жана $a<b$ болсо, анда $\int_a^b f(x)dx$ интегралынын сандык мааниси $[a,b]$ кесиндисиндеги ийри $y=f(x)$ сызыгынын төмөн жагындагы S аянтына барабар болот, б. а., $S=\int_a^b f(x)dx$

Мисал.

1. $\int_0^1 dx$ - бул жактарынын узундугу 1ге барабар болгон квадраттын аянты;

2. $\int_0^1 xdx$ - катеттеринин узундуктары 1ге барабар болгон тик бурчтуу үч бурчтуктун аянты;

3. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$ - бул радиусу 1ге барабар болгон тегеректин бир чейрегинин аянты.

Анык интегралдын экономикалык мааниси:

Айталы $z = f(t)$ функциясы кандайдыр бир өндүрүштүн өндүрүмдүүлүгүнүн убакыттын өтүүсү менен өзгөрүүсүн мүнөздөсүн. $[O,T]$ убакыт аралыгында өндүрүлгөн продукциянын көлөмү U табалы.

Эгерде убакыттын өтүүсү менен өндүрүмдүүлүк өзгөрбөсө, анда кандайдыр бир $[t,t+\Delta t]$ убакыт аралыгында өндүрүлгөн продукциянын ΔU көлөмү $\Delta U = f(t)\Delta t$ формуласы менен берилет. Жалпы учурда $\Delta U \approx f(\xi)\Delta t,\ \xi \in [t,t+\Delta t]$, жакындаштырылган барабардыгы орун алат.

Убакыт аралыгынын $[O,T]$ кесиндисинин $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ чекитинин жардамы менен n бөлүктөргө бөлөбүз. $[t_{i-1},t_i]$ убакыт аралыгында өндүрүлгөн продукциянын ΔU_i көлөмү үчүн $\Delta U_i = f(\xi_i)\Delta t_i,\ \xi_i \in [t_{i-1},t_i],\ \Delta t_i = t_i - t_{i-1}, i = 1,2,\ldots,n$ ге ээ болобуз. Анда $U \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta U_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i$. $\max \Delta t_i \to 0$ да, пайдаланылган жакындаштырылган барабардыктардын ар бири так боло берет, ошондуктан $U = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i$ болот. Анык интегралдын аныктамасын пайдалансак, $U = \int_O^T f(t)dt$ ээ болобуз, б. а., эгерде $f(t)$-бул t **моментиндеги эмгек өндүрүмдүүлүгү болсо, анда** $U = \int_O^T f(t)dt$ **интегралы -** $[O,T]$ **убакыт аралыгында өндүрүлгөн продукциянын көлөмү болот.**

§2. Анык интегралдын жашашынын шарттары

1.Интегралдануучу функциянын чектелиши.

1-теорема. (Функциянын интегралдануучу болушунун зарыл шарты). Эгерде $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде интегралдануучу болсо, анда ал бул кесиндиде чектелген функция болот.

Тескери ыкма менен далилдейли. $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде чектелбесин дейли. Анда $[a,b]$ кесиндисин каалагандай бөлүкчөлөргө бөлүп, ар бир бөлүкчөлөрдөн $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$, чекиттерин тандап алуунун негизинде σ интегралдык суммасын жетишээрлик чоң кылып алуу мүмкүн экендигин көрсөтөбүз.

Чындыганда $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде чектелбесе, анда $[a,b]$ кесиндисин каалагандай бөлүкчөлөргө бөлүүдө, $f(x)$ функциясы бул касиетке жок дегенде бир бөлүкчө кесиндиде, айталы $[x_0,x_1]$ кесиндисинде ээ болот. Калган бөлүкчө кесиндилердин ичинен $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ чекиттерин тандап алып, $\sigma' = f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n$ интегралдык суммасын түзөбүз. $M>0$ туруктуу санын алып, $[x_0,x_1]$ кесиндисинде $|f(\xi_1)| \ge \frac{|\sigma'|+M}{\Delta x_1}$ орун ала тургандай ξ_1 чекитин алабыз. Анда $|f(\xi_1)|\Delta x_1 \ge |\sigma'|+M$ жана $\sigma = |f(\xi_1)\Delta x_1 + \sigma'| \ge |f(\xi_1)\Delta x_1 - \sigma'| \ge M$, б. а., σ интегралдык суммасы абсолюттук чоңдугу боюнча берилген каалагандай M сандан чоң болот. Ошондуктан $\lambda \to 0$ интегралдык сумма чектүү пределге ээ эмес, ал эми бул болсо чектелбеген функциядан алынган аныкинтеграл жашабай тургандыгын билдирет □

Эскертүү. Бул теореманын тескериси орун албайт, б. а., $f(x)$ функциясынын чектелишин интегралдануучулуктун зарыл гана шарты болуп, жетиштүү болбойт.

1. **Мисал**. $[0,1]$ кесиндисиндеги Дирихле функциясын карайлы:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \textit{эгерде рационалдык сан болсо}, \\ 0, \textit{эгерде иррационалдык сан болсо}. \end{cases}$$

◊ Дирихле функциясы чектелген, бирок ал $[0,1]$ кесиндисинде интегралданбайт. Чындыгында, $[0,1]$ кесиндисин каалагандай бөлүүдө $\xi_i (x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$ рационалдык чекиттерин тандап алсак, анда

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1\Delta x_i = 1 \text{ ге;}$$

эгерде ξ_i-иррационалдык чекиттерин тандасак, анда

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0\Delta x_i = 0 \text{ го ээ болобуз.}$$

Демек, берилген кесиндини жетишээрлик кичине бөлүкчө кесиндилерге бөлүүдө интегралдык суммабыз 0 жана 1 маанилерин кабыл алат. Ошондуктан $\lambda \to 0$ интегралдык сумма пределге ээ эмес ◊

Демек, кандайдыр бир $f(x)$ функциясынан алынган аныk интегралдын жашашы үчүн, бул функция кошумча касиеттерге ээ болушу керек. Бул касиеттерди көрсөтүү үчүн жогорку жана төмөнкү суммалар түшүнүктөрүн киргизүү зарыл.

2. Дарбунун суммалары

Айталы $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде чектелген жана ал кесиндини $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ чекиттеринин жардамы менен n бөлүккө бөлөлү. m_i жана M_i менен функциясынын $[x_{i-1}, x_i]$ кесиндисиндеги тиешелүү төмөнкү жана жогорку чектерин белгилеп, төмөнкү суммаларды түзөбүз:

$$S = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + ... + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

$$s = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + ... + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

Бул суммалар $f(x)$ функциясы үчүн **Дарбунун жогорку жана төмөнкү суммалары** деп аташат.

Жогорку жана төмөнкү чектердин аныктамасынан $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ үчүн $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$ келип чыгат. Мындан

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = S$$

б. а., каалагандай интегралдык сумма жана Дарбунун суммалары берилген бөлүкчөлөрдө $s \le \sigma \le S$ барабарсыздыгы менен байланышат.

Дарбунун суммаларынын касиеттери.

1^0. Каалагандай $[a,b]$ кесиндини бөлүкчөлөргө бөлүүдө жана каалагандай $\varepsilon > 0$ саны үчүн σ интегралдык суммасы $0 \le S - \sigma < \varepsilon$ шартын канааттандыра тургандай кылып $[x_{i-1}, x_i]$ кесиндисинен ξ_i чекитин тандап алууга болот. Ошондой эле жол менен интегралдык сумма $0 \le \sigma - S < \varepsilon$ шартын канааттандыра тургандай ξ_i чекитин тандап алууга болот.

2^0. $[a,b]$ кесиндисине жаңы бөлүү чекиттерин кошуудан Дарбунун төмөнкү суммасы кемибейт жана жогорку суммасы өспөйт.

3^0. Каалагандай бөлүүсү үчүн түзүлгөн Дарбунун төмөнкү суммасы башка бир бөлүкчөлөргө туура келген Дарбунун жогорку суммасынан ашып кетпейт.

Айталы s' жана S', s'' жана S'' - булар тиешелүү түрдө биринчи жана экинчи бөлүкчөлөргө туура келген Дарбунун төмөнкү жана жогорку суммалары болсун. Эми биринчи жана экинчи бөлүкчөлөрдөгү бардык чекиттерден турган жалпы бөлүкчөсүн карайлы. Бул бөлүкчөлөрдөгү Дарбунун суммасын s жана S деп белгилейли. Эми жалпы бөлүкчөлөр биринчи бөлүкчөгө экинчи бөлүкчөнүн чекиттерин кошуу аркылуу алынышы мүмкүн. Анда $s \le S$ экендигин эске алып, 2^0- касиет боюнча $s' \le s \le S \le S''$ ке ээ болобуз. Бирок, жалпы бөлүкчөсү экинчи бөлүкчөсүнөн биринчи бөлүчөсүнүн чекиттерин кошуу менен да алынышы мүмкүн. Ошондуктан $s'' \le s \le S \le S'$.
Алынган барабарсыздыктарды салыштырсак $s' \le S''$, $s'' \le S'$ ке ээ болобуз.

4^0. $f(x)$ функциясы үчүн Дарбунун жогорку суммаларынын $\{S\}$ көптүгү төмөн жагынан чектелген, ал эми Дарбунун төмөнкү суммасынын $\{s\}$ көптүгү жогору жагынан чектелген болот. Жана $\{s\}$ көптүгүнүн накта жогорку чеги $\{S\}$ көптүгүнүн накта төмөн чегинен ашып кетпейт.

3.Интегралдануучулуктун зарыл жана жетиштүү шарты.

2-теорема. $[a,b]$ кесиндисинде чектелген $f(x)$ функциясы бул кесиндиде интегралдануучу болушу үчүн

$$\lim_{\lambda \to 0}(S - s) = 0 \tag{2.1}$$

шарты орун алышы зарыл жана жетиштүү.

(2.1) шарты каалагандай $\varepsilon > 0$ үчүн кандайдыр бир $\delta > 0$ табылып, $\lambda < \delta$ болгондо $|S - s| < \varepsilon$ орун алат деген менен тең күчтүү. Бизде $s \le S$ болгондуктан акыркы барабарсыздык

$$S - s < \varepsilon \tag{2.2}$$

шарты менен тең күчтүү.

Зарыл шарты. Айталы $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде интегралдануучу болсун, б. а., $I = \int_a^b f(x)dx$ анык интегралы жашасын. Каалагандай $\varepsilon > 0$ саны үчүн ушундай бир $\delta > 0$ табылып, $\lambda < \delta$ шартын канааттандыруучу каалагандай бөлүштүрүү үчүн

$$|\sigma - I| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{4} \tag{2.3}$$

орун алат дегенди билдирет. Каалагандай бөлүкчөнү турактуу коелу. Бул бөлүкчө үчүн биринчи касиеттин негизинде

$$S-\sigma' \le \varepsilon/4;\ \sigma''-s \le \varepsilon/4 \qquad (2.4)$$

шарты орун ала тургандай σ' жана σ'' интегралдык суммасын түзүүгө болот.
Эки интегралдык сумма σ' жана σ'' тең (2.3) барабарсыздыгын канааттандыра тургандыгын белгилеп кетебиз. Анда

$$S-s=(S-\sigma')+(\sigma'-I)+(I-\sigma'')+(\sigma''-s)<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon.$$

Демек, (2.2)-шарты орун алат.

Жетиштүү шарты. Айталы (2.2)-шарты орун алсын. Анда Дарбунун каалагандай жогорку жана төмөнкү суммалары үчүн 4^0-касиет боюнча $s \le I_* \le I^* \le S$ орун алат. Ошондуктан $0 \le I^* - I_* \le S - s$ болот, мындан (2.2)-шарты боюнча $0 \le I^* - I_* < \varepsilon$ каалагандай $\varepsilon > 0$ үчүн орун алат. Демек, $I^* - I_* = 0$, б. а., $I^* = I_*$. Мында $I = I^* = I_*$ десек, анда каалагандай бөлүкчөлөр үчүн

$$s \le I \le S \qquad (2.5)$$

барабарсыздыгына ээ болобуз. Эгерде σ интегралдык суммасы жана Дарбунун s жана S суммалары бир эле r бөлүкчөлөрүнө туура келсе, анда (2.1) боюнча

$$s \le \sigma \le S \qquad (2.6)$$

орун алат.

(2.6) жана (2.5.) барабарсыздыктарынан $\lambda < \delta$ болгондо $|\sigma - I| < \varepsilon$ орун алары келип чыгат. Ал эми бул болсо I саны $\lambda \to 0$ да σ - интегралдык суммасынын пределин дегенди б. а., $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде интегралдануучу дегенди билдирет

4. Үзгүлтүксүз жана айрым үзгүлтүктүү функциялардын интегралдануучулугу

3-теорема. Эгерде $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болсо, анда ал берилген кесиндиде интегралдануучу болот.

4-теорема. Эгерде $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде чектелген жана чектүү сандагы чекиттерден башкасында үзгүлтүксүз болсо, анда ал берилген кесиндиде интегралдануучу болот.

§3. Анык интегралдын негизги касиеттери

1^0.Турактуу көбөйтүүчүнү интеграл белгисинин алдына чыгарууга болот, б. а.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \qquad k-const \tag{3.1}$$

Алдынкы аныктамадагыдай эле $[a,b]$ кесиндисин бөлүктөргө бөлүп,

$$\int_a^b \kappa f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n \kappa f(\xi_i)\Delta x_i = \kappa\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \kappa\int_a^b f(x)dx$$

ээ болобуз

2^0.Эки функциянын алгебралык суммасынан алынган анык интеграл бул функциялардын интегралдарынын суммасына барабар, б. а.

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx. \tag{3.2}$$

Бул касиетти деле

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n [f(\xi_i)\pm g(\xi_i)]\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n [f(\xi_i)\Delta x_i \pm g(\xi_i)\Delta x_i] =$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{\lambda\to 0}^n f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

3^0.Эгерде интегралдоо кесиндиси бөлүктөргө бөлүнсө, анда бардык кесиндидеги интеграл бөлүкчө кесиндилердеги интегралдардын суммасына барабар, б. а., $\forall a,b,c$ жана $f(x)$ үчүн

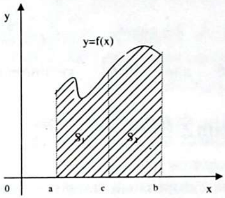
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{3.3}$$

орун алат.

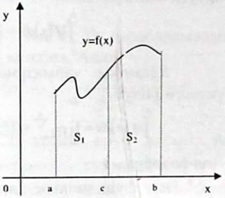
3-касиеттин **геометриялык маанисин** карайлы. Айталы $a<c<b$ жана $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде терс эмес болсун. Анык интегралдын геометриялык мааниси боюнча $\int_a^c f(x)dx = S_1$; $\int_c^b f(x)dx = S_2$; (3.1-чийме) $\int_a^b f(x)dx = S$ болот. Мында S - бул $[a,b]$ кесиндисиндеги $y=f(x)$ ийри сызыгынын төмөн жагындагы фигуранын аянты (3.1-чиймедеги бардык штрихтелген фигуранын аянты).

Анда (3.3) формуласы боюнча $S = S_1 + S_2$.

Айталы $a<b<c$ жана $y=f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде терс эмес болсун. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ экендигин эске алып (3.3)



3.1−чийме



3.2−чийме

формуласы инчи интегралды жого[illegible]ли төмөнкү пределинен чоң боло тургандай кылып жазабыз:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx-\int_b^c f(x)dx \tag{3.4}$$

Бул (3.4)-барабардыгы аянттардын ортосундагы төмөнкү тиешелештикти көрсөтөт: $S_1=S+S_2$. Мында S - бул $[a,b]$ кесиндисиндеги $y=f(x)$ ийри сызыгынын төмөн жагындагы фигуранын аянты (3.2 чийме).

§4. Интегралды чамалоо. Орточо маани жөнүндө теорема

Бул параграфта $a<b$ деп эсептейбиз.

1^0 .Эгерде $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде оң болсо, б. а., $f(x)\geq 0$ болсо, анда

$$\int_a^b f(x)dx\geq 0$$

болот.

$f(x)\geq 0 \Leftrightarrow f(\xi_i)\geq 0,\quad \Delta x_i=x_i-x_{i-1}>0,\quad i=\overline{1,n}$. Анда $[a,b]$ кесиндисиндеги $f(x)$ функциясы үчүн каалагандай $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\geq 0$ интегралдык суммасы терс эмес болот. $\lambda\to 0$ да $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ барабарсыздыгынан пределге өтсөк, анда $\int_a^b f(x)dx\geq 0$ го ээ болобуз.

2^0 . Эгерде $[a,b]$ кесиндисинде $f(x)\leq g(x)$ болсо, анда

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \qquad (4.1)$$

орун алат.

$f(x)\le g(x)$ болгондуктан $f(x)-g(x)\ge 0$ болот. Бул функция үчүн 1-касиетти пайдалансак $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx \ge 0$го ээ болобуз.

Мындан 2- касиетти колдонуп $\int_a^b [g(x)-f(x)]dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \ge 0$ же (4.1) орун алышына ынтайбыз

3^0. $[a,b]$ кесиндисинде аныкталган функциясы үчүн

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \qquad (4.2)$$

барабарсыздыгы орун алат.

$-|f(x)|\le f(x)\le |f(x)|$ барабарсыздыгына 2-касиетти пайдалансак

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$$

Бул (4.2)-тең күчтүү.

Бул чамалоодон төмөндөгү натыйжа келип чыгат.

Натыйжа. Эгерде $[a,b]$ кесиндисинде $|f(x)|\le k$ болсо анда

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le k(b-a) \qquad (4.3)$$

барабарсыздыгы орун алат.

Чындыгында $|f(x)|\le k$ барабарсыздыгынан жана 2-чи; 3-чү касиеттерден төмөнкүнү алабыз

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b kdx = k\int_a^b dx$$

Мындан $\int_a^b dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} 1\Delta x_i = b-a$ эске алып (4.3)кө ээ болобуз.

4^0. Эгерде m жана M сандары тиешелүү түрдө $[a,b]$ кесиндисиндеги $f(x)$ функциясынын эң чоң жана эң кичине маанилери болушса, анда

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \qquad (4.5)$$

Шарт боюнча $\forall x\in[a,b]$ үчүн $m\le f(x)\le M$ болгондуктан экинчи касиетти эске алсак, анда

$$m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b dx$$

ээ болобуз. Демек (4.5) далилденген болот

1-теорема. Орточо маани жөнүндө теорема.

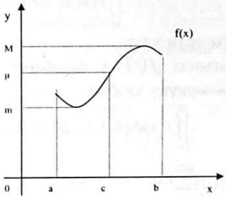
Эгерде $f(x)$ функциясы $[a,b]$ сегментинде үзгүлтүксүз болсо, анда бул кесиндиден кандайдыр бир c чекити табылып

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \tag{4.6}$$

орун алат.

$f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болсо, анда кандайдыр бир m жана M сандары табылып $\min\limits_{[a,b]} f(x) = m \le f(x) \le M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$ орун алары бизге белгилүү.

Мындан 4-касиетти пайдалансак $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ га ээ болобуз. Бул барабарсыздыктын эки жагын тең $(b-a)$ га бөлүп жиберебиз: $m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$ да $\mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ деп белгилейли. Анда $m \le \mu \le M$ болот. μ саны $f(x)$ үзгүлтүксүз функциясынын $[a,b]$



4.1−чийме

кесиндисиндеги эң чоң жана эң кичине маанилеринин арасында жайгашкандыктан (4.1-чийме), анда ушундай бир c чекити табылып $f(c)=0$. Ошондуктан $\int_a^b f(x)dx/(b-a) = f(c)$ болот. Бул болсо (4.6)-менен тең күчтүү.

(4.6)-барабарсыздыгы **орточо маани жөнүндөгү формула** деп аталат, ал эми $f(c)$ чоңдугу $f(x)$ функциясынын $[a,b]$ кесиндисинде **орточо мааниси** деп аталат. Орточо маани жөнүндөгү теорема **геометриялык мааниге** ээ: $f(x)\geq 0$ болгондо анык интеграл бийиктиги $f(c)$ жана негизи $(b-a)$ га барабар болгон тик бурчтуктун аянтына барабар болот

§5. Жогорку пределинен көз каранды болгон анык интеграл

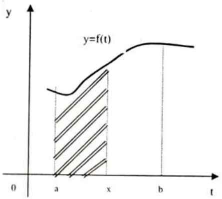
Буга чейин биз белгилүүлөрдү пайдаланып, жаңы функцияларды тургузууда төрт арифметикалык амалды жана функциядан функцияны табууну пайдаланганбыз. Бул параграфта белгилөөлөр боюнча жаңы функцияны тургузуунун башка бир жолун карайбыз.

Эгерде $y=f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде интегралдануучу болсо, анда ал $[a,x]\subset[a,b]$ кесиндисинде да интегралдануучу болот. Аныктама боюнча

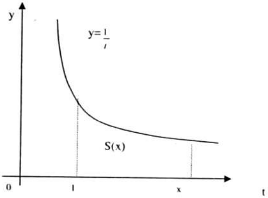
$$\Phi(x)=\int_a^x f(x)dx=\int_a^x f(t)dt \qquad (5.1)$$

Мында $x\in[a,b]$ ал эми $\Phi(x)$ функциясы **жогорку предели өзгөрүлмө болгон интеграл** деп аталат.

Айталы $[a,b]$ кесиндисинде $f(t)\geq 0$ болсун. Анда $\Phi(x)$ функциясынын x чекитиндеги мааниси $[a,x]$ кесиндисиндеги $y=f(t)$ ийри сызыгынын алдындагы $S(x)$ аянтына барабар болот (5.1–чийме).



5.1–чийме



5.2–чийме

Бул жогорку предели өзгөрүлмө болгон интегралдын **геометриялык маанисин** берет.

Мисалы, $\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x, x > 1$ болгондуктан $\ln x$ функциясынын x чекитиндеги мааниси сан жагынан $[1, x]$ кесиндисиндеги $y = \frac{1}{t}$ гиперболасынын төмөн жагындагы аянтына барабар (5.2 – чийме). Эми $\Phi(x)$ функциясынын (же жогорку предели өзгөрүлмө болгон интегралдын) касиеттерин карайлы.

1-теорема. Эгерде $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болсо, анда $\Phi(x)$ функциясы да бул кесиндиде үзгүлтүксүз болот.

Δx өсүндүсүн $x + \Delta x \in [a,b]$ кесиндисине таандык боло тургандай кылып тандап алалы. Анда, (3.3) формула боюнча

$$\Phi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \Phi(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \quad (5.2)$$

барабардыгына ээ болобуз. Орточо маани жөнүндөгү теорема боюнча кандайдыр бир $\xi \in [x, x+\Delta x]$ маани аныкталып, $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\Delta x$ орун алат. Анда

$$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = f(\xi)\cdot\Delta x \quad (5.3)$$

ээ болобуз. Эми $\Delta x \to 0$ да пределге өтүп жана пределдер жөнүндөгү теоремаларды пайдалансак, анда

$$\lim_{\Delta x \to 0}[\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)] = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi)\Delta x = 0$$

келип чыгат.

2-теорема. Айталы $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болсун. Анда $[a,b]$ кесиндисинен алынган ар бир x чекитинде жогорку өзгөрүлмө предел боюнча алынган $\Phi(x)$ функциясынын туундусу интеграл алдындагы $f(x)$ функциясына барабар болот , б. а.,

$$\Phi'(x) = \left[\int_a^x f(t)dt\right]' = f(x) \quad (5.4)$$

Биринчи теоремадагы (5.3) барабардыгын пайдаланабыз. Анда

$$\frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = f(\xi) \quad (5.5)$$

мында $\xi \in [x, x+\Delta x]$. Эми (5.5) $\Delta x \to 0$ да пределге өтүп жана $\lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x)$ экендигин эске алып (5.4), далилдеген болобуз.

Натыйжа. Эгерде $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болсо, анда бул функция үчүн $[a,b]$ кесиндисинде баштапкы функция жашайт. Чындыгында $f(x)$ функциясы үчүн баштапкы функция болуп (5.1) формуласы менен берилген $\Phi(x)$ функциясы эсептелет.

Эскертүү: Элементардык функцияларга колдонулган арифметикалык амалдар жана функциядан функцияны табуу кайра эле элементардык функцияларга алып келет. Ал эми жогорку предели өзгөрүлмө болгон (5.1)-интегралын карасак, мында $y = f(x)$ функциясынын элементардуулугу $\Phi(x)$ функциясынын элементардык функция болушун камсыз кылбайт. Мисалы, $\int_0^x e^{-t^2} dt$, $\int_e^x \frac{dt}{\ln t}$ функциялары элементардык эмес. Себеби алар элементардык функциялар классында баштапкы функцияга ээ болушпаган $e^{-x^2}, \frac{1}{\ln x}$ функциялары үчүн баштапкы функция болуп эсептелишет.

§6. Ньютон-Лейбиництин формуласы

Бул параграфта жогорку предели өзгөрүлмө болгон интегралдардын касиеттерине таянып, биз интегралдык эсептөөлөрдөгү негизги формулага ээ болобуз.

1.Теорема. Айталы $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз жана $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясы үчүн баштапкы функция болсун. Анда $[a,b]$ кесиндисинде алынган $f(x)$ функциясынын анык интегралы бул кесиндисиндеги $F(x)$ баштапкы функциясынын өсүндүсүнө барабар болот, б. а.,

$$\int_a^в f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Айталы $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясы үчүн кандайдыр бир баштапкы функция болсун. Бирок §5теги теорема 2 боюнча (5.1) формуласы менен берилген $\Phi(x)$ функциясы да $f(x)$ үчүн баштапкы функция болот, анда алар турактуу C санына гана айырмаланышат, б. а.,

$$F(x) = \Phi(x) + C$$

Анда баштапкы функциянын өсүндүсү үчүн төмөндөгүгө ээ болубуз:
$F(b) - F(a) = (\Phi(в) + C) - (\Phi(a) + C) = \Phi(в) - \Phi(a) = \int_a^в f(x)dx - \int_a^a f(x)dx.$ Ал эми $\int_a^a f(x)dx = 0$ болгондуктан $F(b) - F(a) = \int_{fa}^b f(x)dx$ ке ээ болобуз. Мындан

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (6.1)$$

келип чыгат.

(6.1) формуласы Ньютон-Лейбництин формуласы деп аталат.

Ньютон-Лейбництин (6.1) формуласын пайдаланып, анык интегралды чыгарууда төмөндөгүдөй эки кадамды жүргүзөбүз. Биринчи кадамда анык эмес интегралды табуу техникасын пайдаланып, интеграл алдындагы $f(x)$ функциясы үчүн кандайдыр бир $F(x)$ баштапкы функциясын табабыз; экинчи кадамда Ньютон-Лейбництин формуласын пайдаланып, баштапкы функциянын өсүндүсүн табабыз. Мына ушуга байланыштуу баштапкы функциянын өсүндүсү үчүн ыңгайлуу болгон белгилөөнү киргизели. Аныктама боюнча

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (6.2)$$

орун алат.

Ньютон-Лейбництин формуласын пайдаланууда интеграл алдындагы $f(x)$ функциясы үчүн каалагандай $F(x)$ баштапкы функциясын алууга болот.

Демек анда (6.1) жана (6.2) формулаларын бириктирип,

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

формуласына ээ болобуз.

1-мисал Төмөнкү интегралды эсептегиле а) $\int_0^1 x^2 dx$, б) $\int_0^1 2^{3x-4} dx$

◊ а) $f(x)=x^2$ функциясы үчүн баштапкы функция $F(x)=\frac{x^3}{3}+C$ түрүндө болот. Ньютон-Лейбництин формуласы боюнча интегралды табуу үчүн $C=0$ болгон баштапкы функциясын алабыз. Анда

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

б) $f(x)=2^{3x-4}$ функциясы үчүн баштапкы функция болуп, $F(x)=\frac{1}{3\ln 2}2^{3x-4}$ эсептелет.

Анда $\int_1^2 2^{3x-4}dx = \frac{1}{3\ln 2}\left(2^{3x-4}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{3\ln 2}\left(4-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6\ln 2}$ ◊

Ньютон-Лейбництин формуласы боюнча

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)dx$$ жана

$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$ болот.

Демек, Ньютон-Лейбництин формуласын пайдаланганда интегралдоо пределдеринин кайсынысы: төмөнкү же жогрку чоң экендиги мааниге ээ эмес.

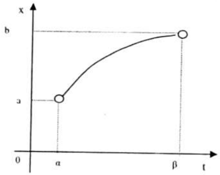
§7. Анык интегралдагы өзгөрүлмөлөрдү алмаштыруу

1.Теорема Айталы $y = f(x)$ $[a,b]$ кесиндисиндеги кандайдыр бир үзгүлтүксүз функция болсун.
Анда, эгерде: 1) $x = \varphi(t)$ функциясы $[\alpha,\beta]$ кесиндисинде дифференцирленүүчү жана үзгүлтүксүз $\varphi'(t)$ туундуга ээ болсо:

2) $x = \varphi(t)$ функциясынын маанилеринин көптүгү болуп $[\alpha,\beta]$ кесиндиси эсептелинсе;

3) $\varphi(\alpha) = a$ жана $\varphi(\beta) = b$ (7.1–чийме) болсо, анда төмөнкү формула орун алат:

$$\int_a^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \qquad (7.1)$$



7.1–чийме

□ Ньютон-Лейбництин формуласы боюнча $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ орун алат. Мында $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясы үчүн $[a,b]$ кесиндисиндеги кандайдыр бир баштапкы функция. Экинчи жактан $[\alpha,\beta]$ кесиндисинде t өзгөрүлмөлүү $\Phi(t) = F[\varphi(t)]$ татаал функциясын карайбыз. Татаал функцияны дифференцирлөө эрежеси боюнча төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\Phi'(t) = F'[\varphi(t)]\varphi'(t) = f[\phi(t)]\varphi'(t).$$

Мындан $\Phi(t)$ функциясы $f[\phi(t)]\varphi'(t)$ функциясы үчүн баштапкы функция болоору көрүнүп турат. Ошондуктан Ньютон-Лейбництин формуласы боюнча

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$ орун алат. □

(7.1) формуласы **анык интегралдагы өзгөрүлмөлөрдү алмаштыруу формуласы** деп аталат.

1-мисал. Интегралды эсептегиле: $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

◊ $x = \sin t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ подстановкасын алалы да, подстановканын законду улугун текшеребиз.

1. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ функциясы $[0,1]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз;

2. $x = \sin t$ функциясы $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ кесиндисинде дифференцирленүүчү жана $x' = \cos t$ туундусу $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз;

3. t нөлдөн $\frac{\pi}{2}$ чейин өзгөргөндө $x = \sin t$ функциясы нөлдөн бирге чейин өзгөрөт, б. а., $x(0) = 0,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ болот. Демек, коюлган подстановка жогорку теореманын бардык шарттарын канааттандырат. Анда (7.1) формуласын пайдаланып төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left\{\begin{array}{l} x = \sin t, \\ dx = \cos t dt, \\ x = 0 \Rightarrow t = 0, \\ x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt == \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}0 - 0 - \frac{1}{2}0\right) = \frac{\pi}{4}.◊$$

Эскертүү. (7.1) формуласын пайдаланганда жогорку теореманын шарттарынын орун алышын текшерүү зарыл. Эгерде бул шарттардын бири гана орун албаса, анда туура эмес жыйынтык алынышы да мүмкүн.

2-мисал. $\int_0^{\pi} dx$ интегралын эсептегиле.

◊ $\int_0^{\pi} dx = x\Big|_0^{\pi} = \pi$ жана экинчи жактан,

$$\int_0^{\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x(1+tg^2 x)} = \int_0^{\pi} \frac{d(tgx)}{1+tg^2 x} = \begin{cases} t = tgx, \\ dx = \dfrac{1}{1+t^2}dt, \\ x = 0 \Rightarrow t = 0, \\ x = \pi \Rightarrow t = 0 \end{cases} = \int_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = 0 .$$

$\pi \neq 0$ болгондуктан, алынган жыйынтык туура эмес. Бул жыйынтыктын келип чыгышынын себеби $t = tgx$ функциясы $x = \frac{\pi}{2}$ чекитинде үзүлүшкө ээ жана жогорку теореманын шарттарын канааттандырбайт ◊

§8. Анык интегралды бөлүктөп интегралдоо

1-теорема. Эгерде $U(x)$ жана $V(x)$ функциялары $[a;b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз туундуга ээ болушса, анда төмөнкү формула орун алат:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu \qquad (8.1)$$

□ $(U(x)\cdot V(x))$ функциясы $[U(x)V(x)]' = U'(x)V(x) + V'(x)U(x)$ функциясы үчүн баштапкы функция болгондуктан Ньютон-Лейбництин формуласы боюнча төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\int_a^b [u(x)v'(x) + u'(x)v(x)]dx = [u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b .$$

Мындан анык интегралдын касиеттерин пайдалансак төмөнкүнү алабыз:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b \Rightarrow \int_a^b udv + \int_a^b vdu = u\cdot v\Big|_a^b \Rightarrow$$

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu . \square$$

(8.1) формуласы **анык интегралды бөлүктөп интегралдоо формуласы** деп аталат.

1-мисал. Интегралды эсептегиле: $\int_1^e \ln x dx$

$$\Diamond \int_1^e \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} = (x\ln x)\Big|_1^e - \int_1^e dx = (x\ln x)\Big|_1^e - x\Big|_1^e = 1 . \Diamond$$

2-мисал. Интегралды эсептегиле: $\int_0^1 arctg\, x dx$.

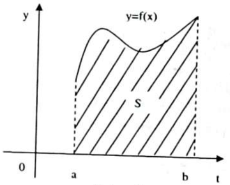
$$\Diamond \int_0^1 arctg\, x dx = \begin{vmatrix} u = arctg\, x, & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx, & v = x \end{vmatrix} = x\, arctg\, x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^2} =$$

$$= \left[x\, arctg\, x - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| \right]\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2} . \Diamond$$

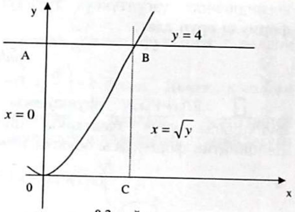
§ 9. Анык интегралдын геометриялык колдонулуштары

1.Жалпак фигуралардын аянттарын эсептөө.

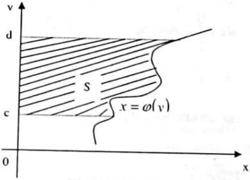
1)Айталы $y = f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз туундуга ээ болсун. Анда анык интегралдын геометриялык мааниси боюнча $[a;b]$ кесиндисиндеги $y = f(x)$ ийри сызыгынын төмөн жагындагы S аянты (9.1-чийме) сандык мааниси боюнча $\int_a^b f(x)dx$



9.1-чийме



9.2–чийме



9.3–чийме

анык интегралына барабар болот, б. а., $S=\int_a^b f(x)dx$ орун алат.

1-мисал. $x=\sqrt{y}, x=0, y=4$ сызыктары менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла.

◊ 9.2-чиймедеги изделүүчү аянт (OAB ийри сызыктуу үч бурчтугунун аянты S) төмөнкү аянттардын айырмасына барабар болот: $S=S_{OABC}-S_{OBC}$. Бул аянттардын ар бири анык интегралдын геометриялык маанисинен табылат.

$y=4$, $x=\sqrt{y}$ ийри сызыктарынын кесилишинде жайланышкан B чекитинин координаталары төмөнкү системадан табылат:

$\begin{cases} y=4 \\ x=\sqrt{y} \end{cases} = \begin{cases} y=4 \\ x=2 \end{cases}$. Демек, B чекитинин координаталары $(2;4)$.

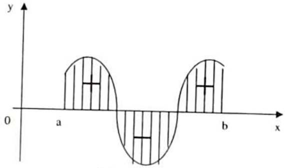
Анда $S_{OABC}=\int_0^2 4dx=4x\Big|_0^2=8$, $S_{OBC}=\int_0^2 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8}{3}$ болот. Анда изделүүчү аянт $S=8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$ кв. бир.◊

Ушул эле меселе башка жол менен чыгарылышы мүмкүн экендигин белгилеп кетебиз. Ал үчүн жалпы мүнөздөгү айрым эскертүүлөрдү берели: 1) анык интегралдын аныктамасы боюнча

$$\int_c^d \varphi(y)dy=\lim_{\max\Delta\to 0}\sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i)\Delta y_i .$$

Бул барабардык боюнча интегралдык сумманы түзүүдө $[c;d]$ кесиндиси ордината огунан алынат деп түшүнүүгө болот.

Анда $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ - булар ар бир бөлүкчө кесиндиде алынган ординаталар болот. Ошондуктан, эгерде $[c;d]$ кесиндисинде $x=\varphi(y)\geq 0$ болсо, анда $\int_c^d \varphi(y)dy$ интегралы сандык мааниси боюнча $x=\varphi(y)$ ийри сызыгы жана $x=0$, $y=c$, $y=d$ түз сызыктары менен



9.4–чийме

чектелген ийри сызыктуу трапециянын аянты S ке барабар болот (9.3-чийме), б. а., $S=\int_c^d \varphi(y)dy$, анда жогорку мисалды

$S=\int_0^4 \sqrt{y}dy=\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4=\frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}}-0^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{16}{3}$ кв.бир. түрүндө чыгарууга болот.

2) Эгерде $\forall x\in[a,b]$ үчүн $f(x)\le 0$ болсо, анда анык интеграл $\int_a^b f(x)dx\le 0$ болот эле. Абсолюттук чоңдугу боюнча ал туура келген ийри сызыктуу трапециянын аянтын берет.

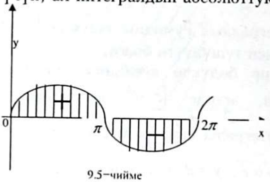
$$-S=\int_a^b f(x)dx.$$

Эгерде $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде чектүү санда белгисин өзгөртсө (9.4-чийме), анда $[a,b]$ аралыгы боюнча алынуучу интегралды ар бир бөлүкчө боюнча алынуучу интегралдын суммасына бөлөбүз.

Кайсы бөлүкчөдө $f(x)\ge 0$ болсо, ошол бөлүкчөдө интеграл да оң мааниге ээ болот, ал эми $f(x)\le 0$ бөлүкчөдө интеграл дагы терс мааниге ээ болот. Бардык аралык боюнча алынуучу интеграл OX огунун үстүндө жаткан аянттардан, алдында жаткан аянттарды кемиткенге барабар болот эле. Ошентип, аянттардын суммасын алуу үчүн, ал интегралдын абсолюттук чоңдугунун суммасын же

$$S=\int_a^b |f(x)|dx, \qquad (9.1)$$

интегралын чыгаруу жетиштүү.



9.5−чийме

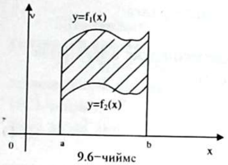
Мисалы, $y=\sin x$ синусоидасы жана OX огу $(0\le x\le 2\pi)$ менен чектелген аянтты тапкыла (9.5-чийме).

◊ Мында $0\le x\le\pi, \sin x\ge 0$, ал эми $\pi\le x\le 2\pi$, $\sin x\le 0$ болгондуктан

$$S=\int_0^{\pi}\sin xdx+\left|\int_0^{2\pi}\sin xdx\right|=\int_0^{2\pi}|\sin x|dx,$$

$$\int_0^{\pi}\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-(\cos\pi-\cos 0)=-(-1-1)=2,$$

$$\int_{\pi}^{2\pi}\sin xdx=-\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=-(\cos 2\pi-\cos\pi)=-2.$$



9.6–чийме

ошондуктан, $S = 2 + |-2| = 4$ кв.бир ◊

3) Эгерде изделүүчү аянт $y = f_1(x), y = f_2(x)$ ийри сызыктары $f_1(x) \geq f_2(x)$ жана $x = a$, $x = b$ түз сызыктары аркылуу чектелсе (9.6-чийме), анда

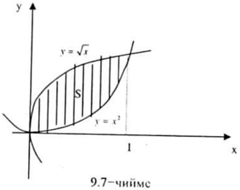
$$S = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx,$$

(9.2) формуласы орун алат.

Мисалы, $y = \sqrt{x}$ жана $y = x^2$ ийри сызыктары менен чектелген аянтты тапкыла (9.7-чийме).

◊ Бул ийри сызыктар чиймеден көрүнүп тургандай эки чекитте кесилишип жатат. Интегралдоо пределдерин табуу үчүн ал кесилүү чекиттердин абсциссын табуу керек, ал үчүн $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = x^2 \end{cases}$ системасын чыгарып, $x = 0$, $x = 1$ маанилерге ээ болобуз. Анда

$$S = \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_1^1 x^2 dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ кв.бир. } ◊$$

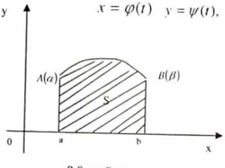


9.7–чийме

4) Эми биз ийри сызыктуу трапециянын аянтын, ал ийри сызык параметрдик теңдеме аркылуу

$$x = \varphi(t) \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad \varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b, \qquad (9.3)$$

берилген учурундагы аянтты табалы. Эгерде (9.3) теңдеме $[a,b]$ аралыгында аныкталган кандайдыр бир $y = f(x)$функциясын аныктаса, анда ийри сызыктуу трапециянын аянты $S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx,$



9.8–чийме

формуласы аркылуу аныкталат эле. Ушул интегралга

$$x=\varphi(t),\quad dx=\varphi'(t)dt$$

подстановкасын колдонуп жана (9.3) теңдемесин эске алсак,анда

$$y=f(x)=f[\varphi(t)]=\psi(t),$$

болот эле. Ошондуктан

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)dt, \tag{9.4}$$

формуласына ээ болобуз да, бул формула ийри сызык параметрдик түрдө берилген учурда ийри сызыктуу трапециясынын аянтын табуу формуласы болот.

Мисалы, 1. $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ эллипси менен чектелген аянтты эсептегиле.

◊ Эллипстин жогорку бөлүгүнүн аянтын аныктап, аны экиге көбөйтсөк бардык аянтты тапкан болобуз. Анда x өзгөрүлмөсү $-a$ дан $+a$ дейре өзгөргөндө, t чоңдугу π ден 0 дейре өзгөрөт. Ошентип,

$$S=2\int_{\pi}^{0}(b\sin t)(-a\sin t\,dt)=-2ab\int_{\pi}^{0}\sin^2 t\,dt=2ab\int_{0}^{\pi}\sin^2 t\,dt=2ab\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=$$

$$=2ab\left[\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi}=\pi ab$$

Эгерде $a=b$ болсо, анда $S=\pi a^2$ тегеректин аянтына ээ болобуз. ◊

2. арк циклоидасы

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),$$

жана OX огу боюнча чектелген аянтты эсептегиле.

◊ Бул учурда параметринин 0дөн π дейре өзгөрүүсүнө xтин 0дөн $2\pi a$ өзгөрүшүнө туура келет. Анда (9.4) формула боюнча

$$S=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2dt=a^2\left[\int_0^{2\pi}dt-2\int_0^{2\pi}\cos t\,dt+\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt\right]$$

;

$$\int_0^{2\pi}dt=2\pi;\quad \int_0^{2\pi}\cos t\,dt=0,\quad \int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\pi$$

болгондуктан

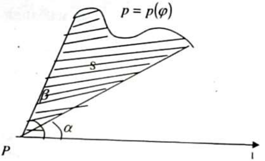
$$S=a^2(2\pi+\pi)=3\pi a^2 \text{ кв.бир. } ◊$$

2.Полярдык координант системасында ийри сызыктуу сектордун аянты.

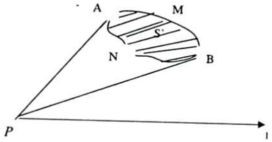
а) Эгерде ийри сызыктуу сектор $p=\rho(\varphi)$ ийри сызыгынын жаасы жана полярдык $\varphi=\alpha, \varphi=\beta$ радиустары аркылуу чектелсе (9.9-чийме),
анда анын аянты

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi$$

формуласы аркылуу аныкталат.



9.9–чийме

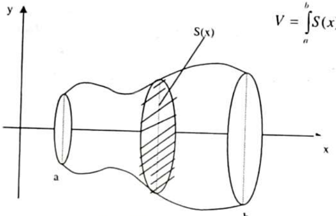


9.10–чийме

б) Ал эми жалпак фигура туюк ийри сызык аркылуу чектелсе, анда анын аянты бир нече секторлордун аянттарынын суммасына барабар болот (9.10-чийме).

$$S_{AMBNA}=S_{APBMA}-S_{APBNA}$$

3.Телонун көлөмүн



9.11–чийме

$$V=\int_a^b S(x)dx, \tag{9.4}$$

формуласы аркылуу аныктайбыз. Мында $S(x)$ – OX огунун абсциссасы x чекитине түшүрүлгөн перпендикуляр тегиздик аркылуу телону кескендеги кесилиште пайда болгон аянт, a жана b оң жаккы, сол жаккы x өзгөрүлмөсүн чектөөчү тегиздиктер.
Ушул $S(x)$ функциясы белгилүү деп эсептелинет жана x өзгөрмөсү a дан b дейре өзгөргөндө үзгүлтүксүз өзгөрүп турат.

4.Ийри сызыгынын жаасынын узундугу.

а) Эгерде ийри сызык декарттык координат ситемасында $y = f(x), (a \le x \le b)$ теңдемеси менен берилсе жана $y = f(x)$ фунциясы $[a,b]$да үзгүлтүксүз туундуга ээ болсо, анда жаанын узундугу

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y_x'^2}\,dx$$

формуласы менен аныкталат. Мында a, b жаанын оң жана сол жакκы учтарынын абсциссалары.

б) Ал эми ийри сызык параметрдик $x = x(t)$, $y = y(t)$теңдемелери менен берилсе жана $[t_1, t_2]$ аралыгында үзгүлтүксүз туундуларына ээ болсо, анда жаанын узундугу

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt,$$

формуласы боюнча эсептелинет.

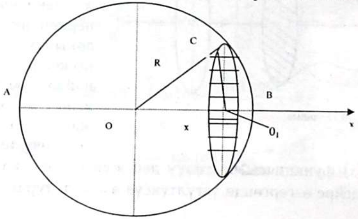
в) Эгерде ийри сызык полярдык координат ситемасында $p = \rho(\varphi)$, теңдемеси аркылуу берилсе жана $\rho(\varphi)$ фунциясы $[\varphi_1, \varphi_2]$аралыгында үзгүлтүксүз $\rho'(\varphi)$ туундуга ээ болсо, анда жаанын узундугу

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2(\varphi)}\,d\varphi,$$

формуласы аркылуу аныкталат.

Мисалдар: 1. Радиусу R болгон шардын көлөмүн тапкыла.

◊ Биз, OX огу үчүн шардын бир диаметрин алалы, ал эми координат башталмасы шардын борбору менен дал келсин. Анда 9.12-чиймеден $OO_1 = x$, $OC = R$, $O_1C = \sqrt{R^2 - x^2}$ болсо шардын борборунан x аралыгында OX огуна перпендикуляр тегиздик менен кескендеги, кесилиште пайда болгон тегеректин аянты. Ал



кесилиштин аянты

9.12−чийме

$$S(x) = \pi(CO_1)^2 = \pi(R^2 - x^2).$$

Шардын көлөмү (9.4) формула боюнча

$$V = \int_{-R}^{R} S(x)dx = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = 2\int_{0}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = 2\pi\int_{0}^{R}(R^2 - x^2)dx =$$

$$= 2\pi\left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^R = 2\pi R^3(1 - \frac{1}{3}) = \frac{4}{3}\pi R^3 \ . \ \Diamond$$

2. Айлананын узундугун тапкыла

$$x^2 + y^2 = R^2$$

◊ Биринчи чейректе жаткан айлананын узундугун табалы. Ал үчүн

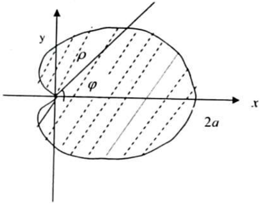
$y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $\quad y' = -\dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$, аныктап, формулага койсок

$$\frac{1}{4}l = \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}dx = R\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R = R \cdot \frac{\pi}{2} \ .$$

Анда айлананын узундугу

$$l = 2\pi R \ .$$

3. $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ кардиоидасынын аянтын тапкыла(9.13-чийме).



9.13–чийме

◊ Каралуучу аянт полярдык окко карата симметриялуу болгондуктан, (9.13-чийме) анын жогорку бөлүгүнүн (OX -огунун үстүндөгүсүн) аянтын таап экиге көбөйтсөк болот. Мында $0 \le \varphi \le \pi$ өзгөрөт. Анда формула боюнча

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\rho^2(\varphi)d\varphi = a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi =$$

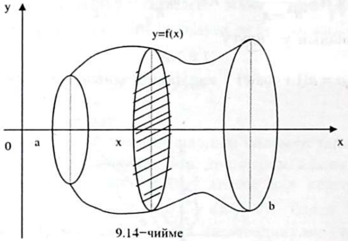
$$= a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\frac{1+2\cos\varphi}{2})d\varphi = a^2(\frac{3}{2}\varphi+2sin\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi)\Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2 \text{ кв.бир } \Diamond$$

5. Айлануудан пайда болгон телолордун көлөмү

Айталы $[a,b]$ кесиндисинде белгиси турактуу үзгүлтүксүз $y = f(x)$ функциясы берилсин. $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$ сызыктары менен чектелген ийри сызыктуу трапецияны абсцисса огунун айланасында айландыруудан келип чыккан телонун көлөмү V_x ти табуу талап кылынсын (9.14-чийме).

Бул убакта ар кандай x чекитинде OX огуна перпендикуляр тегиздик менен кескенде кесилиште тегерек пайда болот. Ал тегеректин радиусу $y = f(x)$ болгондуктан, аянты

$$S(x) = \pi y^2 = \pi[f(x)]^2.$$



9.14−чийме

Эми, алдынкы (9.4) формуланы колдонсок, анда

$$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx \qquad (9.5)$$

формуласына ээ болобуз.

Ушундай эле, эгерде бизге $x = \varphi(y)$, $c \le y \le d$ теңдемеси менен ийри сызык OY огуна карата берилсе, анда $x = \varphi(y)$ $y = c, y = d$ сызыктары аркылуу түзүлгөн ийри сызыктуу трапецияны OY огуна айлантып, жогоркудай эле

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d [\varphi(y)]^2 dy \tag{9.6}$$

формуласына ээ болобуз.

6. Анык интегралдын кээ бир колдонулуштары

а) Эгерде материалдык М чекити үзгүлтүксүз $F = f(x)$ күчүнүн таасири аркылуу OX огунун багыты боюнча a дан b аралыгына жылсын. Чекитти жылдыруу убагында күчтүн багыты үзгүлтүксүз өзгөрүп турса, анда ал күчтүн аткарган жумушу

$$A = \int_a^b f(x)dx,$$

формуласы аркылуу аныкталат.

Мисалы, Пружинаны 5 см аралыкка чоюу үчүн кандай жумуш сарпталынат, эгерде аны 1 см аралыкка чоюу үчүн $1H$ күч жумшалса?

◊ Гуктун закону боюнча $x(м)$ аралыкка пружинаны чоюу үчүн $F = kx$ күчү керек. Бул пропорционалдуулукту колдонуп k коэффициентин төмөнкү шарттан аныктайбыз:

$x = 0{,}01(м)$, анда $F = 1\,H$, б. а., $k = \dfrac{1}{0{,}01} = 100, F = 100x$

Демек, $$A = \int_0^{0.05} 100xdx = 50x^2\Big|_0^{0.05} = 50 \cdot 0{,}0025 = 0{,}125(дж)$$ ◊.

б) Ийри сызыктын статикалык моменттери жана инерция моменттери. Бардык маселелерде масса ийри сызык боюнча бир калыпта бөлүштүрүлгөн жана сызыктуу тыгыздык бирге барабар деп эсептелинет (бир тектүү ийри сызык каралат).

Анда $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ ийри сызыктын жаасынын статикалык M_x, M_y моменттери OX, OY окторуна карата

$$M_x = \int_a^b ydl, \qquad M_y = \int_a^b xdl,$$

анык интегралдары аркылуу аныкталат. Ал эми инерция моменттери J_x, J_y ошол эле OX, OY окторуна карата

$$J_x = \int_a^b y^2 dl, \qquad J_y = \int_a^b y^2 dl$$

Мында $dl = \sqrt{1 + y_x'^2}\,dx$ интегралдары аркылуу эсептелинет.

в) Жаанын $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ оордук борборунун координаталары

$$\bar{x} = \frac{M_y}{l}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{l},$$

(мында l-жаанын узундугу),формуласы аркылуу, ал эми жалпак, ийри сызыктуу трапеция түрүндөгү фигуранын оордук борборунун координаталары

$$\bar{x} = \frac{1}{S}\int_a^b xydx, \qquad \bar{x} = \frac{1}{2S}\int_a^b y^2dx,$$

формуласы аркылуу аныкталат (мында S -ал фигуранын аянты).

Мисалдар. 1. $y = \sin x \quad (0 \le x \le \pi)$ синусоидасынын OX огуна карата статикалык моменттерин тапкыла.

◊ Биз $y' = \cos x, dl = \sqrt{1 + y_x'^2}dx = \sqrt{1+\cos^2 x}dx,$

таап, формулага койсок, анда

$$M_x = \int_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}dx = \left\langle \begin{matrix} \cos x = t, \sin xdx = -dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \pi \Rightarrow t = -1 \end{matrix} \right\rangle = \int_1^{-1}\sqrt{1+t^2}dt =$$

$$= \int_{-1}^1 \sqrt{1+t^2}dt = 2\int_0^1\sqrt{1+t^2}dt = 2\left(\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)\right)\Big|_0^1 = \sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right) \ ◊.$$

2. Айлананын $x^2 + y^2 = 4$ биринчи жана экинчи чейректеги жаасынын оордук борборунун координаталарын тапкыла.

◊ Маселени жеңилдетүү үчүн айлананын параметрдик теңдемесине өтөлү:

$$x = 2\cos t, \ y = 2\sin t, 0 \le t \le \pi, \ x_t' = -2\sin t, \ y_t' = 2\cos t$$

$$dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}dt = 2dt.$$

Анда, $$M_x = 4\int_0^\pi \sin tdt = -4cost\Big|_0^\pi = 8; \ M_y = 4\int_0^\pi \cos tdt = 4\sin t\Big|_0^\pi = 0,$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{l} = \frac{0}{2\pi} = 0, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{l} = \frac{8}{2\pi} = \frac{4}{\pi}. \ ◊$$

§10. Өздүк эмес интегралдар

Жогорку параграфтарда биз чектүү кесиндилерде интегралдануучу функциялардан алынган интегралдарды карадык. Практикада интегралдоо кесиндилеринин бир учу (же экөө тең) чексиз болгон же берилген функция интегралдоо кесиндисинде чектелбеген учурда бул түшүнүктөрдү жалпылоо зарылдыгы келип чыгат.

1.Интералдоо предели чексиз болгон өздүк эмес интегралдар.

Айталы $y = f(x)$ функциясы $[a,t]$ кесиндисинде аныкталган жана интегралданууучу болсун, б. а., каалаган $t \geq a$ мааниси үчүн $\phi(t) = \int_a^t f(x)dx$ функциясы аныкталган болсун.

1-аныктама $\varphi(t)$ функциясынын $t \to +\infty$ умтулгандагы предели $[a,+\infty)$ жарым интервалындагы $f(x)$ функциясынан алынган **өздүк эмес интеграл** деп аталат жана $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ деп белгиленет.

Демек,
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)dx \qquad (10.1)$$

Эгерде (10.1) формуланын оң жагындагы предел жашаса жана чектүү болсо, анда өздүк эмес интеграл (берилген пределге) **жыйналуучу** деп аталат, тескери учурда **таралуучу** деп аталат.

Өздүк эмес интеграл менен иштөөдө төмөндөгүдөй эки маселени бөлүп алабыз:

а) берилген өздүк эмес интегралдын жыйналуучулугу жөнүндө суроону изилдөө;

б) эгерде өздүк эмес интеграл жыйналса, анда интегралдын маанисин эсептөө;

Айрым бир учурда бул эки маселени чечүүнү бириктирүүгө туура келет.

Өздүк эмес интегралдарды колдонуу **жарым чексиз (чексиз) фигуранын аянты** түшүнүгүнө маани берүүгө мүмкүндүк түзөт.

1-мисал. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ интегралын эсептегиле.

◊ Аныктама боюнча $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{dx}{x^2}$.

Предел алдындагы интегралды эсептөө үчүн Ньютон-Лейбництин формуласын колдонобуз.

$$\int_1^t x^{-2}dx = \left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_1^t = 1 - \frac{1}{t}.$$

Анда

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{t \to +\infty}\left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1$ болот, б. а., изделүүчү өздүк эмес интеграл бирге жыйналат. ◊

Ушул интегралга окшош эле $m>1$ болгон учурда $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^m}$

интегралы $\frac{1}{m-1}$ ге жыйнала тургандыгын жана $m \le 1$ болгондо таралуучу болорун көрсөтүүгө болот. Ошентип,

$$\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^m}=\lim_{t\to\infty}\int\limits_{1}^{t}\frac{dx}{x^m}; \quad \int\limits_{1}^{t}\frac{dx}{x^m}=\frac{1}{1-m}x^{1-m}\Big|_{1}^{t}=\frac{1}{1-m}\left[t^{1-m}-1\right]$$

эми $m>1$, болсо $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^m}=\frac{1}{m-1}$, б. а., интеграл жыйналат;

$m<1$ десек, анда $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^m}=\infty$, интеграл таралат;

ал эми $m=1$ болсо $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x}=lnx\Big|_{1}^{\infty}=\infty$, интеграл таралуучу болот.

Алдынкы аныктама сыяктуу эле $(-\infty,b]$ жарым интервалындагы өздүк интегралын аныктай алабыз.

$$\int\limits_{-\infty}^{b}f(x)dx=\lim_{t\to-\infty}\int\limits_{t}^{b}f(x)dx. \qquad (10.2)$$

$\int\limits_{-\infty}^{b}f(x)dx$ өздүк эмес интегралынын жыйналуучулугу жогоркудай эле аныкталат.

Эми $(-\infty,+\infty)$ интервалындагы өздүк эмес интеграл түшүнүгүн берели. Айталы кандайдыр бир a саны үчүн $\int\limits_{-\infty}^{a}f(x)dx$ жана $\int\limits_{+\infty}^{a}f(x)dx$ өздүк эмес интегралдары жыйналуучу болушсун. Анда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{a}f(x)dx+\int\limits_{a}^{+\infty}f(x)dx. \qquad (10.3)$$

деп алабыз. Мында $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ өздүк эмес интегралы **жыйналуучу интеграл** болот.

Эгерде (10.3) барабардыктын оң жагындагы интегралдардын жок дегенде бирөө таралуучу болсо, анда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ өздүк эмес интегралы да таралуучу интеграл болот.

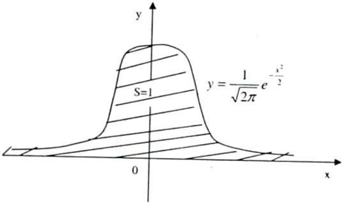
2-мисал. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$ интегралын эсептегиле.

◊ $\int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx$ жана $\int\limits_{0}^{+\infty} e^x dx$ жыйналуучулукка изилдейбиз.

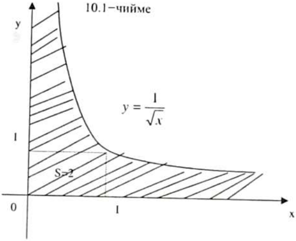
$\int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim\limits_{t\to-\infty} \int\limits_{t}^{0} e^x dx = \lim\limits_{t\to-\infty} (e^0 - e^t) = 1,$ б. а., биринчи интеграл 1ге жыйналат. Бирок

$\int\limits_{0}^{+\infty} e^x dx = \lim\limits_{t\to+\infty} \int\limits_{0}^{t} e^x dx = \lim\limits_{t\to+\infty} (e^t - 1) = +\infty,$ б. а., $\int\limits_{0}^{+\infty} e^x dx$ интегралы

таралуучу. Анда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$ өздүк эмес интегралы да таралат, себеби $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = \int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx + \int\limits_{0}^{+\infty} e^x dx$ түрүндө жазууга болот эле. ◊



10.1–чийме



10.2–чийме

Ыктымалдуулуктар теориясы курсунда Эйлер-Пуассондун интегралы деп аталуучу $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx$ өздүк эмес интегралы кездешет жана бул интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi},$$

барабар экендиги далилденген, б. а., $(-\infty;+\infty)$ интервалында $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ ийри сызыгынын (Гаусс ийри сызыгынын) төмөн жагындагы S аянты 1ге барабар (10.1 – чийме).

Көпчүлүк учурда берилген өздүк эмес интегралдын жыйналышынын же таралышынын шартын билүү максатында, ал интегралды чамалоо зарыл. Ал үчүн, далилдөөсүз төмөнкү эки теореманы келтирип, алардын колдонулушун мисалдар аркылуу көрсөтөлү.

1-теорема. Эгерде бардык $x(x \ge a)$ үчүн

$$0 \le f(x) \le \varphi(x),$$

барабарсыздыгы аткарылып,

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$$

интегралы жыйналса, анда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралы дагы жыйналат жана

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx,$$

барабарсыздыгы орун алат.

Мисалы, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ интегралы жыйналабы.

◊ Муну көрсөтүү максатында, бардык $x \ge 1$ маанилеринде $\frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2}$ барабарсыздыгы орун алат, жана

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\bigg|_1^{\infty} = 1,$$

интегралы жыйналат. Ошондуктан

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2\left(1+e^x\right)},$$

интегралы да жыйналат жана анын мааниси 1ден кичине болот.

2-теорема. Эгерде бардык $x(x \geq a)$ үчүн

$$0 \leq \varphi(x) \leq f(x),$$

барабарсыздыгы аткарылып, бирок

$$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx,$$

интегралы таралуучу болсо, анда сөзсүз

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

интегралы да таралат.

Мисалы, $\int_1^{+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx$

◊ интегралы үчүн $\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

бирок $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to+\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^t = +\infty$ ($y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ функциясынын графиги 10.2 чийме)

Ошондуктан берилген интеграл таралуучу болот. ◊

3-теорема. Эгерде $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx,$

интегралы жыйналса, анда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx,$$

интегралы жыйналат. Ушул учурда акыркы интегралды абсолюттуу жыйналуучу интеграл деп айтабыз.

Мисалы, $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^3}dx$

интегралы берилсин. Ушул интегралдын абсолюттук жыйналуучулугунун көрсөткүлө.

◊ Мында, интеграл алдындагы функциянын белгиси өзгөрүлмө болгондуктан

$$\left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \leq \frac{1}{x^3} \qquad \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Демек, $\int\limits_{1}^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^3}\right|dx$ интегралы жыйналат. Ошондуктан берилген интеграл абсолюттуу түрдө жыйналат. ◊

2.Чектелбеген функциялардан алынган өздүк эмес интегралдар. Айталы $y=f(x)$ функциясы $[a,b)$ интервалында аныкталып, үзгүлтүксүз болсун, ал эми $x=b$ маанисинде функция чектелбесин же аныкталбасын, же болбосо үзгүлтүккө учурасын.

2-аныктама $\delta>0$ болгондо $\lim\limits_{\delta\to+0}\int\limits_{a}^{b-\delta}f(x)dx$ предели $y=f(x)$ функциясынан $[a,b)$ жарым интервалында алынган **өздүк эмес интегралы** деп аталат жана $\int\limits_{a}^{b}f(x)dx$ деп белгиленет.

Демек,
$$\int\limits_{a}^{b}f(x)dx=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{a}^{b-\delta}f(x)dx \tag{10.5}$$

Эгерде (10.5)нин оң жагындагы предел жашаса жана чектүү болсо, анда өздүк эмес интеграл – **жыйналуучу** деп, ал эми тескери учурда – **таралуучу** деп аталат.

$(a,b]$ жарым интервалында аныкталып, үзгүлтүксүз болгон, бирок чектелбеген $y=f(x)$ функциясынан алынган өздүк эмес интеграл түшүнүгү жогоркуга окшош эле аныкталат:
$$\int\limits_{a}^{b}f(x)dx=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{a+\delta}^{b}f(x)dx \tag{10.6}$$
мында $x=a$ маанисинде функция үзгүлтүккө учурайт ($x=a$ чекитин өзгөчө чекит деп да айтсак болот).

Эскертүү. Эгерде $f(x)$ функциясы $x=c$, $c\in(a,b)$ чекитинде чектелбеген болсо (c-өзгөчө чекит болсо), анда $\int\limits_{a}^{b}f(x)dx$ интегралы да **өздүк эмес интеграл** деп аталат. Бул учурда
$$\int\limits_{a}^{b}f(x)dx=\int\limits_{a}^{c}f(x)dx+\int\limits_{c}^{b}f(x)dx$$
интегралынын оң жагындагы эки өздүк эмес интегралдар жыйналышса, анда $\int\limits_{a}^{b}f(x)dx$ интегралы **жыйналуучу** деп аталат, тескери учурда таралуучу болот.

Мисалдар. 1. $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$, интегралын чыгаргыла.

$$\Diamond \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\delta \to 1-0} \int_0^\delta \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\lim_{\delta \to 1-0} 2\sqrt{1-x}\Big|_0^\delta = -\lim_{\delta \to 1-0} 2\left[\sqrt{1-\delta} - 1\right] = 2$$

(интеграл жыйналат) ◊

2. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ интегралын карайлы.

◊ Интегралдоо интервалында функция аныкталбаган $x = 0$ чекити болгондуктан, интегралды эки интегралдын суммасына

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\delta \to -0} \int_{-1}^{\delta} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^2},$$

бөлөбүз.

а. $\lim_{\delta \to -0} \int_{-1}^{\delta} \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\delta \to -0} \frac{1}{x}\Big|_{-1}^{\delta} = -\lim_{\delta \to -0}\left(\frac{1}{\delta} + 1\right) = \infty$,

$[0,1)$ аралыгында интеграл таралуучу болду.

б. $\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\varepsilon \to +0}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty$,

мында да $(0,1]$ интервалында интеграл таралуучу болуп калды.

Ошентип, берилген интеграл бардык $[-1,1]$ аралыгында таралат.

Эгерде, биз функциянын үзгүлтүккө учураган $x = 0$ чекитин эске албай эле чыгарсак, анда $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -(1+1) = -2$. Туура эмес жыйынтыкка келмекпиз.

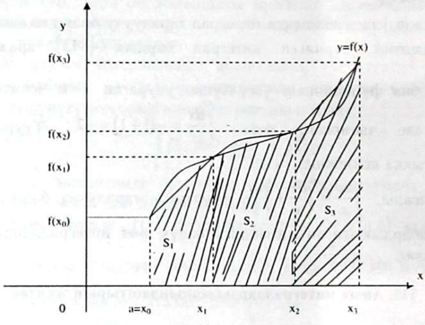
Мисалы, $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x}$ интегралы таралуучу болот, себеби бул барабардыктын оң жагындагы өздүк эмес интегралдардын экөө тең таралат.

§11. Анык интегралдарды жакындаштырып эсептөө

Анык интегралды эсептөөдөгү негизги каражат болуп Ньютон – Лейбництин формуласы эсептелет. Бирок интеграл алдындагы функция татаал болгон учурда бул формуланы колдонуу практикалык жактан бир топ кыйынчылыктарды туудурат. Ошондуктан талап кылынган тактыкта изделүүчү интегралдын жакындаштырылган маанисин табууга мүмкүндүк берүүчү **сандык ыкмалар** колдонулат.

Бул параграфта анык интегралды жакындаштырып эсептөөдөгү формулалардын бири – **трапециялар формуласын** карайбыз.

Айталы $[a,b]$ кесиндисинде $y=f(x)$ үзгүлтүксүз функциясы берилсин. Андан тышкары $[a,b]$ кесиндисинде $f(x)\geq 0$ деп алалы. Анда $\int_a^b f(x)dx$ интегралынын сандык мааниси $[a,b]$ кесиндисиндеги $y=f(x)$ функциясынын төмөн жагындагы аянтка барабар экендиги белгилүү. Эгерде ийри сызыгынын төмөн жагындагы аянттын ордуна бул ийри сызыкка жетишээрлик жакын жайланышкан сынык сызыктын алдындагы аянтты алсак, анда изделүүчү интегралдын жакындаштырылган маанисине ээ болобуз. Бул сынык сызыкты төмөндөгүдөй жол менен тургузалы: интегралдоо кесиндисин узундуктары $h=\dfrac{b-a}{n}$ ка барабар болгон n барабар бөлүккө бөлөбүз жана ар бир $[x_{i-1},x_i]$, $i=\overline{1,n}$, $x_i=x_0+ih$, бөлүкчө кесиндисиндеги $y=f(x)$ ийри сызыгынын бөлүгүн бул кесиндинин учтарын бириктирүүчү хорда менен алмаштырабыз (11.1-чийме).



11.1-чийме

Анда

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_1+S_2+\ldots+S_n .$$

Мында $S_1,S_2,\ldots,S_n$ - трапециялардын аянттары (ар бир бөлүкчө кесиндидеги хордалардын төмөн жагындагы аянттар), бул аянттар 11.1 – чиймеде штрихтелип көрсөтүлгөн.

Бирок, $S_1 = \frac{f(x_o)+f(x_1)}{2}h; S_2 = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}h;...;S_n = \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}h.$

Анда $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{f(x_o)+f(x_1)}{2}h + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}h + ... + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}h. =$

$$= h\left(\frac{f(x_o)}{2} + \frac{f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)}{2} + \frac{f(x_2)}{2} + ... + \frac{f(x_{n-1})}{2} + \frac{f(x_n)}{2}\right)$$

h көбөйтүүчүсүн кашаадан чыгаргандан кийин берилген суммадагы $\frac{f(x_0)}{2}$ *жана* $\frac{f(x_n)}{2}$ ден башка кошулуучулардын баары 2 жолудан кездешкени көрүнүп турат. Бул окшош кошулуучуларды жыйнап жана $h = \frac{b-a}{n}$ экендигин эске алсак, төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{h}\left(\frac{f(x_n)+f(x_n)}{2} + f(x_1) + ... + f(x_{n-1})\right) \qquad (11.1)$$

Мында $x_0 = a, x_i = x_0 + ih; i = \overline{1,n}$.

(11.1) формуласы **трапециялар формуласы** деп аталат.

Бул формула $y = f(x)$ функциясы терс эмес болгон учурда алынды. Ал жыйынтык жалпы учурда да туура бойдон кала берээрин далилдөөгө болот.

Эми трапециялар формуласын пайдалануудагы каталыкты чамалоо маселесин карайбыз.

(11.1) – формуласынын оң жагындагы туюнтманы $S(n)$ деп белгилейли. Анда

$$\Delta = \left|\int_a^b f(x)dx - S(n)\right|$$

трапециялар формуласын пайдалануудагы абсолюттук каталык.

$y = f(x)$ функциясынын экинчи туундусу $f''(x)$тын модулунун $[a,b]$ кесиндисиндеги максималдык маанисин M_2 деп белгилейли, б. а. $M_2 = \max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$.

Анда трапециялар формуласын пайдалануудагы Δ абсолюттук каталыгы

$$\Delta \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2 \qquad (11.2)$$

(11.2)шартын канагаттандырат.

1-мисал. $n = 5$ болгондо $\int_1^{1,5}\frac{dx}{x}$ интегралын трапециялар формуласы боюнча эсептегиле жана кетирилген каталыкты чамалагыла.

◊ Бөлүкчө кесиндилердин саны 5ке барабар болгондуктан бөлүкчө кесиндилердин узундугу $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1,5-1}{5} = 0,1$ ге барабар жана $x_i = x_0 + ih,\ i = \overline{1,5},\ x_0 = 1$ болгондуктан, $x_1 = 1,1;\ x_2 = 1,2;\ x_3 = 1,3;\ x_4 = 1,4;\ x_5 = 1,5$ болот. Интеграл алдындагы функция $f(x) = \frac{1}{x}$. Ошондуктан (11.1) формула боюнча төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\int_1^{1,5} \frac{dx}{x} \approx 0,1\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1,5}\right) + \frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,2} + \frac{1}{1,3} + \frac{1}{1,4}\right) = 0,4059$$

Эми кетирилген каталыкты чамалайлы. $f''(x) = \left(\left(\frac{1}{x}\right)'\right)' = \frac{2}{x^3}$. Бул функция $[1;1,5]$ кесиндисинде монотондуу кемүүчү. Ошондуктан өзүнүн максималдык маанисине бул кесиндинин сол жаккы учунда, б. а., $x = 1$ чекитинде ээ болот. Анда $M_2 = f''(1) = \frac{2}{1^3} = 2$ жана (11.2) формула боюнча $\Delta \le \frac{0,5^3}{12 \cdot 5^3} \cdot 2 = 0,84 \cdot 10^{-3}$ болот.

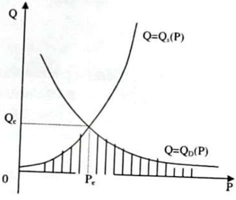
Экинчи жактан Ньютон–Лейбниц формуласы боюнча $\int_1^{1,5} \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_1^{1,5} = \ln 1,5 = 0,4059$. биринчи жыйынтык менен дал келет ◊

Демек, трапециялар формуласы айрым функциялардан алынган аныкинтегралдарды жакындаштырып эсептөөдө ыңгайлуу ыкма болуп саналат.

§12. Аныкинтегралдын экономикада колдонулушу

Биз жогоруда аныкинтегралдын экономикалык маанисин көрдүк: эмгек өндүрүмдүүлүк функциясы белгилүү болгон кезде аныкинтеграл мааниси өндүрүлгөн продукция көлөмүн билдирет. Аныкинтегралдын дагы колдонулуштарына токтололу.

1.Суроо-талап жана сунуш ийри сызыгы.(8-гл., §1дин 4 п-да каралган) Суроо-талап деп, адамдардын товарды сатып алуудагы каалоосу жана мүмкүнчүлүгү. Ал эми **суроо-талап ийри сызыгы**-бул сатып алуучулардын талабы боюнча, товардын баасы P менен анын санынын (көлөмүнүн) Q_D арасындагы көз карандылыктын графикалык көрүнүшү. Суроо-талап функциясы $Q_D = Q_D(P)$ монотондуу кемийт. (12.1-чийме).



12.1–чийме .

Сунуш деп, товарды базарга сатуу үчүн алып чыгуудагы, сатуучунун каалоосу жана мүмкүнчүлүгү. **Сунуш ийри сызыгы**-бул баа P жана сатуучунун базарга сунуш кылуучу товарлардын көлөмү (саны) Q_S тин арасындагы көз карандылыктын графикалык туюнтулушу.

Сунуш функциясы $Q_S = Q_S(P)$ монотондуу өсөт.

2. Базар тең салмактуулугу деп суроо-талап жана сунуш чоңдуктарынын базарда дал келүүсү, б. а., $Q_D = Q_S$ шартын айтабыз.(12.1-чиймени кара).

Тең салмактуулукка жеткирген P_e бааны **теңдештик баа** деп,ал эми тең салмактуулук шартындагы сатуу көлөмүн Q_e **теңдештик көлөмү (саны)** деп айтабыз.

3. Ашык керектөөчү – бул, сатып алуучунун макулдугу боюнча базардан товарды сатып алуудагы максималдык чыгым менен чыныгы чыгымдын айырмасы. Керектөөчү ашыгы CS сандык жагынан, суроо-талап ийри сызыгы $Q_D = Q_D(P)$ жана $P = P_e$, $Q = 0$ (12.1 чиймени кара) түз сызыктары менен чектелген аянтка барабар. Анын чоңдугу анык интеграл

$$CS = \int_{P_e}^{P_B} Q_D(P)dP,$$

аркылуу аныкталат Мында P_B-болсо $Q_D(P)=0$ теңдемесинин эң кичине оң тамыры. Эгерде бул теңдеме оң тамырга ээ болбосо, анда

$$CS = \int_{P_e}^{\infty} Q_D(P)dP,$$

өздүк эмес интегралы менен эсептелинет.

Ашык өндүрүүчү – бул өндүрүүчүнүн товарды саткандагы чыныгы түшкөн сумма менен товарды алар макул болуп алган минималдык сумманын айырмасы. Ашык өндүрүүчү PS сан жагынан сунуш ийри сызыгы $Q_S = Q_S(P)$ жана $P = P_e$, $P = P_H$, $Q = 0$ сызыктары менен чектелген аянтка барабар. Мында P_H -болсо $Q_S(P) = 0$ теңдемесинин эң кичине оң тамыры. Ашык өндүрүүчүнүн чоңдугу

$$PS = \int_{P_{II}}^{P_E} Q_S(P)dP,$$

анык интегралы аркылуу аныкталат.

4. Киреше – бул кандайдыр бир көлөмдөгү товарды сатуудан түшкөн акчанын суммасы. **Чыгым** болсо өндүрүүчүнүн кандайдыр бир көлөмдөгү товарды өндүрүүдө жана сатууга кеткен каражаты.

Киреше – сатуучунун кирешеси менен анын чыгымынын айырмасы.

Толук чыгым $TC = FC + VC$ барабардыгы аркылуу аныкталат. Мында FC – туруктуу чыгым, VC - өзгөрүлмө чыгымы.

Пределдик чыгым MC болсо чыгаруу көлөмү Δq өскөндө толук чыгымдын ΔTC өсүшүн көрсөтүүчү чоңдук жана $\Delta q \to 0$, $MC = d(TC)/dq = d(VC)/dq$ барабардыгы орун алат. Эгерде $MC(q)$ чоңдугу белгилүү болсо, анда өзгөрүлмө чыгым

$$VC = \int_0^q M(q)dq,$$

ал эми толук чыгым

$$\mathrm{TC} = \mathrm{FC} + \mathrm{VC} = \int_0^q \mathrm{MC}(q)dq,$$

аркылуу аныкталат.

5.Капиталдын кирешелүүгү деп, убакыт бирдигинде капиталдын киреше алып келүүсү. Эгерде кирешелүүлүк R капиталы убакыттын өзгөрүүсү менен өзгөрсө, анда $R = R(t)$ болот да, t убактысында капиталдан алынган жалпы киреше

$$TR = \int_0^t R(t)dt,$$

интегралына барабар болот.

Орточо кирешелүүлүк. $\overline{R}$ болсо t убактысындагы жалпы кирешенин, ал кирешени алып келүү убакытын аралыгына болгон катышына барабар

$$\overline{R} = \frac{TR}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t R(t)dt.$$

Ушундай эле t убактысындагы **келтирилген киреше**

$$PV = \int_0^t \overline{e}^{\,rt} P(t)dt,$$

интегралы аркылуу аныкталат. Мында r- проценттик ставка, ал процент аркылуу туюнтулат, ал эми $P(t)$ болсо t убактысындагы алынуучу киреше.

Мисалдар. 1. Кандайдыр бир товардын суроо-талап жана сунуш ийри сызыктары $Q_D = 8/P^2, Q_S = P^2/2$ теңдемелери аркылуу берилсин (P - сом / бир., Q мин. бир). Ашык керектөөчүнүн жана өндүрүүчүнү тапкыла.

◊ Адегенде базар теңдештик бааны P_e аныктайлы. Ал үчүн Q_D менен Q_S барабарлайбыз (12.1-чиймени кара)

$$\frac{8}{P^2} = \frac{1}{2}P^2, \quad P^4 = 16.$$

Баанын экономикалык мааниси боюнча $P > 0$ экендигин эске алып, $P_e = 2(сом/бир.)$ алабыз.

Ашык керектөөчү CS -бул $Q_D = 8/P^2, P_e = 2, Q = 0$ сызыктары менен чектелген фигуранын аянты болгондуктан, бул аянт өздүк эмес интеграл аркылуу туюнтулат

$$CS = \int_{P_e}^{\infty} Q_D(D)dP = \int_2^{\infty} \frac{8dP}{P^2} = \lim_{b\to\infty}\int_2^b 8P^{-2}dP = 8\lim_{b\to\infty}\left.\frac{P^{-1}}{-1}\right|_2^b = -8\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{2}\right) = 4(мин\,сом) \;◊$$

Ашык өндүрүүчү PS болсо, $Q_S = P^2/2, P_e = 2, Q = 0$ сызыктары аркылуу чектелген фигуранын аянты болгондуктан, ал аянт

$$PS = \int_0^2 \frac{1}{2}P^2 dP = \left.\frac{1}{6}P^3\right|_0^2 = \frac{1}{6}\times 2^3 = \frac{3}{4}(мин\,сом)$$

2. Пределдик чыгым MC азыктарды өндүрүүдө, анын азыктык көлөмү q дан көз карандылыгы $MC = 500/\sqrt{2q+25}$ формуласы аркылуу берилсе, толук чыгымдын 12 бирдик продукта өндүрүүсүн тапкыла, эгерде туруктуу чыгым $FC = 1200сом$ болсо.

◊ Биз $TC = FC + VC$ экендигин билебиз. Ал эми өзгөрүлмө жана пределдик чыгымдардын q_0 бирдик азыктарды өндүрүүдөгү байланышы

$$VC = \int_0^{q_0} MCdq,$$

интегралы аркылуу берилгендиктен жана бизде q_0=12 болгондуктан

$$VC=\int_0^{12}\frac{500}{\sqrt{2q+25}}dq=500\int_0^{12}\frac{dq}{\sqrt{2q+25}}=\left|\begin{array}{l}\sqrt{2q+25}=t,\\ q=\frac{1}{2}\left(t^2-25\right),\\ dq=dt,\\ q=12\Rightarrow t=7,\\ q=0\Rightarrow t=5.\end{array}\right|=$$

$$=500\int_5^7\frac{tdt}{t}=500t\Big|_5^7=1000.$$

Анда,

$$TC=1200+1000=2200(сом)\ \Diamond$$

3. Жер участогунун ар бир жылдагы кирешеси эки эсе өсөт. Бул участоктун 3 жылдагы орточо жылдык кирешесин тапкыла, эгерде баштапкы киреше жылына 10 миң сом, ал эми кирешенин өсүшү үзгүлтүксүз жана бир калыпта болсо.

◊ Маселенин шартынан, киреше R дин убакыт t дан көз карандылыгы $R_t=R_0\cdot 2^t$ формуласы аркылуу аныкталат. t убактысындагы жалпы киреше $\int_0^t Rdt$ интегралына барабар, ал эми орточо кирешелүүлүк $\overline{R}=\frac{1}{t}\int_0^t Rdt$ интегралы менен аныкталат.

Алар 3 жылда

$$\overline{R}=\frac{1}{3}\int_0^3 R_0\cdot 2^t dt=\frac{1}{3}\int_0^3 10\cdot 2^t dt=\frac{10}{3}\int_0^3 2^t dt=\frac{10}{3}\cdot\frac{2^t}{\ln 2}\Big|_0^3=\frac{10}{3\ln 2}\left(2^3-1\right)=\frac{70}{3\ln 2}\approx 33,66(минсом)\ \Diamond$$

4. Инвестициялык долбоордун баштапкы чыгым капиталы $I_0=50$ миллион сом. Ал долбоордун t убактысындагы кирешеси $P=3t$ (P-миллион сом, t-жылдар) формуласы менен аныкталат жана 10 жылга чейин үзгүлтүксүз жарайт. Жылдык проценттик ставка $r=10\%$. Ал долбоордон түшкөн таза келтирилген кирешени аныктагыла.

◊ Убакыттын $t=T$ аралыгындагы жалпы кирешенин PV суммасы, баштапкы убакытта келтирилгендиги төмөнкүчө аныкталат

$$PV=\int_0^T P(t)e^{-rt}dt=\int_0^{10}3te^{-0.1t}dt=3\left(\frac{te^{-0,1t}}{-0,1}\Big|_0^{10}-\int_0^{10}\frac{e^{-0,1t}}{-0,1}dt\right)=-30te^{-0,1t}\Big|_0^{10}+30\int_0^{10}e^{-0,1t}dt=$$

$$=-30\cdot 10e^{-0,1\cdot 10}+30\cdot\left.\frac{e^{-0,1t}}{-0,1}\right|_0^{10}=-300e^{-1}-300\left(e^{-1}-1\right)=300\left(1-\frac{2}{e}\right)\approx 79{,}27(\text{млн.сом}).$$

Таза келтирилген киреше NPV болсо, анда

$$NPV=PV-I_0=79{,}27-50=29{,}27(\text{млн..сом}).\Diamond$$

Алдыңкы 4 пункттан, чыгым өндүрүүчү жылдардын көлөмүнөн көз каранды, б. а., $C=C(q)$, ал эми пределдик чыгым болсо $MC=C'(q)$-бул өндүрүштөгү кошумча бирдик товар чыгаруудагы чыгымы. Ошондуктан, көпчүлүк учурда чыгым функциясын берилген чыгым пределдин функциясынан аныктоого болот.

Мисалы, Пределдин чыгым функциясы $MC=3q^2-48q+202$, $1\le q\le 20$, берилсин. Чыгым функциясын $C=C(q)$ тапкыла жана 10 бирдик товарды өндүрүүдөгү чыгымды эсептегиле, эгерде биринчи бирдик товарды өндүрүү 50 сом чыгымга алып келсе.

◊ Чыгым функциясын

$$C(q)=\int_1^q MCdq+C_0,$$

интегралы аркылуу, ал эми C_0 – турактууну, маселенин шарты $C(1)=50, C_0=50$ табабыз. Анда

$$C(q)=\int_1^q MCdq+50=q^3-24q^2+202q+50,$$

болот эле. Ушул акыркы барабардыкка $q=10$ десек,

$$C(10)=670 \text{ сом. } \Diamond$$

Эми биз, **акча агымынын дисконтирленген баасын**

$$\prod=\int_0^T J(t)e^{-pt}dt,$$

карайлы. Мында $I(t)$ акча агымынын $0\le t\le T$ убагындагы өзгөрүү ылдамдыгы, P - проценттик ставка.

Мисалдар: 1. Гидроэлектростанцияны курууда акчанын агымы үзгүлтүксүз ылдамдыкта $I(t)=-t^2+20t+5$ (млрд. сом/жыл), 20 жылга, жылына $P=5\%$ проценттик ставка менен берилип турса, ушул агымдын дисконтирленген баасын тапкыла.

◊ Алдыңкы формула боюнча

$$\prod=\int_0^{20}(-t^2+20t+5)e^{-0.05t}dt=\left\langle\begin{matrix}S=-0{,}05t, t=0\Rightarrow S=0\\ t=-20S, t=20\Rightarrow S=-1\\ dt=-20dS\end{matrix}\right\rangle=$$

$$= -20\int_{0}^{-1}\left(-400S^2-400S+5\right)e^S dS = 20\int_{-1}^{0}\left(-400S^2-400S+5\right)e^S dS =$$

$$= \left\langle \begin{matrix} U=-400S^2-400S+5 \\ dU=(-800S-400)dS \\ dv=e^S dS, v=e^S \end{matrix} \right\rangle = 20\left[\left(-400S^2-400S+5\right)e^S\Big|_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0}(800S+400)e^S dS\right] =$$

$$= \left\langle \begin{matrix} U=800S+400, dv=e^S dS \\ dU=800dS, v=e^S \end{matrix} \right\rangle = 20\left[5-5e^{-1}+(800S+400)e^S\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} 800e^S dS\right] =$$

$$= 20\left(5-5e^{-1}+400+(800-400)e^{-1}-800+800e^{-1}\right) = 20\left(1195e^{-1}-395\right)$$

Акырында $\prod = 892$ (млрд. сом) жообун алабыз. ◊

2. Эми акча агымы эч убакта токтобогон учурун карайлы, мисалы, жер участогун иштетүүнү. Эгерде r- үзгүлтүксүз проценттик ставка, ал эми $R(t)$ – туура келген пайда болсо, анда жер участогун дисконтирленген баасын табуу

$$\prod = \int_{0}^{\infty} R(t)e^{-rt} dt ,$$

өздүк эмес интегралын чыгарууга алып келет.

◊ Эгерде жер участогунан $R(t)=5e^{-0{,}7t}$ (млн. сом/жыл)- пайда, $r=100\%$ проценттик ставка менен алынса, анын дисконтирленген баасы

$$\prod = \int_{0}^{\infty} 5e^{-0.7t}\cdot e^{-0.1t} dt = 5\int_{0}^{\infty} e^{-0.8t} dt = 5\cdot\frac{e^{-0.8t}}{-0.8}\Bigg|_{0}^{\infty} = \frac{5}{0{,}8} = 6{,}25 \quad \text{(млн.}$$

сом) болот.

Ушул жыйынтыкты, участок берилген учурдагы $(t=0)$ баасы, б. а., $R(0)=5$ (млн. сом) менен салыштырууга болот. ◊

Эми интегралдын экономикадагы колдонулушуна башка мисалдарды келтирели.

а) Эгерде Кобба-Дуглас функциясында чыгымдалган эмгек убакыттан сызыктуу көз каранды болсо, ал эми чыгымдалган капитал өзгөрбөсө, анда ал $g(t)=(\alpha t+\beta)e^{\gamma t}$ көрүнүшүндө болот. Анда T жыл ичинде өндүрүлгөн продукция көлөмү

$$Q = \int_{0}^{T}(\alpha t+\beta)e^{\gamma t} dt , \qquad (12.1)$$

(12.1) анык интегралына барабар болот.

Мисалдар. 1. Эгерде Кобба-Дуглас функциясы $g(t)=(1+t)e^{3t}$ көрүнүшүндө болсо, анда 4 жыл ичинде чыгарылган продукция көлөмүн тапкыла.

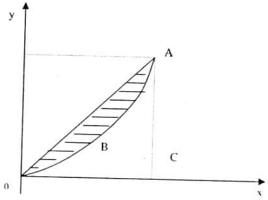
◊ (12.1) формула боюнча төмөндөгүнү алабыз:

$$Q=\int_0^4(1+t)e^{3t}dt=\begin{vmatrix}U=t+1, & du=dt\\ d\vartheta=e^{3t}dt, & \vartheta=\frac{1}{3}e^{3t}\end{vmatrix}=\frac{1}{3}(t+1)e^{3t}\Big|_0^4-\frac{1}{3}\int_0^4 e^{3t}dt=$$

$$=\frac{1}{3}\left((t+1)e^{3t}\Big|_0^4-\frac{1}{3}e^{3t}\Big|_0^4\right)=\frac{1}{3}\left(5\cdot e^{12}-1-\frac{1}{3}e^{12}+\frac{1}{3}\cdot 1\right)=\frac{1}{9}\left(14e^{12}-2\right)\approx 2{,}53\cdot 10^5 .\ ◊$$

б) Киреше процентинин ал кирешеге ээ болгон калк процентинен көз карандылыгы 12.2–чиймедеги ийри сызык түрдө берилген. Бул ийри сызык *OBA* **Лоренцтин ийри сызыгы** деп аталат. Бул ийри сызыгынын жардамында биз кирешелерди калкка бөлүштүрүүнүн барабарсыздык даражасын аныктай алабыз.

Кирешенин барабар бөлүштүрүлүшүндө Лоренц ийри сызыгы түз сызык же *OA* биссектриссасына жакындаштырылат. Ошондуктан *OA* биссектриссасы менен Лоренц ийри сызыгынын ортосундагы *OAB* фигурасынын аянты кирешени калкка бөлүштүрүүнүн барабарсыздык даражасын мүнөздөйт.



12.2–чийме

2. Жүргүзүлгөн изилдөөлөр боюнча кайсы бир мамлекеттеги кирешени бөлүштүрүүдөгү *OBA* Лоренц ийри сызыгы $y=1-\sqrt{1-x^2}$ теңдемеси менен берилээри аныкталган. Анда Джинни коэффициентин тапкыла. Мында x- калктын үлүшү; y- калк кирешесинин үлүшү.

◊ Джини коэффициенти

$$k=\frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}}=1-\frac{S_{OBAC}}{S_{\Delta OAC}}=1-2S_{OBAC}\ \text{себеби, } S_{\Delta OAC}=\frac{1}{2}$$

$$S_{OBAC}=\int_0^1\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)dx=\int_0^1 dx-\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=1-\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$$. Ошондуктан

$$k=1-2\left(1-\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx\right)=2\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx-1$$

$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{4}$; $x=\sin t$ подстановкасын пайдалансак,

$$k=2\frac{\pi}{4}-1=\frac{\pi}{2}-1\approx 0{,}57\,.$$

k нын жетишээрлик чоң мааниси кирешенин калк арасында бирдей эмес бөлүштүрүшүн көрсөтөт.

в) t убакыт (жылдан) кийин берилген проценттик ставка боюнча алынган акыркы чоңдуктан баштапкы сумманы аныктоо **дисконтирлөө** деп аталат. Мындай түрдөгү маселелер капиталдык салуулардын экономикалык эффективдүүлүгүн аныктоодо колдонулат.

Айталы k_t - бул t жылдан кийинки алынган акыркы сумма, k дисконтирленген сумма болсун.

Эгерде жөнөкөй процент менен эсептелинсе, анда $k_t=k(1+it),\ i=\frac{p}{100}$ мындан $k=k_t/(1+it)$ болот. Процент менен эсептелсе $k_t=k/(1+it)\Rightarrow k=k_t(1+it)^t$ болот. Айталы жыл сайын түшүүчү киреше убакыт боюнча өзгөрсүн жана $f(x)$ функциясы менен аныкталып процент үзгүлтүксүз эсептелсин. Бул учурда T убактысындагы k дисконтирленген кирешеси төмөндөгү формула боюнча табылат:

$$\kappa=\int_0^T f(t)e^{-it}dt \qquad (12.2)$$

3. Эгерде алгачкы капиталдык салуулар 10 млн. сомду түзүп жана жыл сайын 1 млн. сомго көбөйсө, анда 8% менен эсептелинген 3 жылдан кийинки дисконтирленген кирешени аныкта.

◊ Капиталдык салымдар $f(t)=10+1t=10+t$ формуласы менен берилет. Анда (12.2) боюнча дисконтирленген сумма төмөнкүгө барабар болот.

$$k=\int_0^3(10+t)e^{-0{,}08t}dt=\left|\begin{matrix}u=10+t; & du=dt\\ d\vartheta=e^{-0{,}08t}\ dt; & \vartheta=-\frac{1}{0{,}08}e^{-0{,}08t}\end{matrix}\right|=-12{,}5e^{-0{,}08t}(10+t)\Big|_0^3+$$

$$+12{,}5\int_0^3 e^{-0{,}08t}dt = 12{,}5e^{-0{,}08t}(10+t)\Big|_0^3 = 156{,}25e^{-0{,}08t}\Big|_0^3 = -12{,}5e^{-0{,}24}\cdot 13 + 12{,}5\cdot 10 -$$

$$-156{,}25e^{-0{,}24} + 156{,}25\cdot 1 = -318{,}75e^{-0{,}24} + 281{,}25 \approx 30{,}5$$

Демек, алгач 30,5 млн. сом салуу керектигин билдирет. ◊

г) Айталы буюмду даярдоого кетирилген убакыттын өндүрүштү өздөштүрүү даражасынан көз карандылыгын сүрөттөөчү $t = t(x)$ формуласы белгилүү болсун. Мында х партиядагы буюмдун кезектеги номери. Анда x_1 ден x_2 ге чейинки өздөштүрүү мезгилиндеги буюмду даярдоого кетирилген орточо убакыт $t_{орт}$ орточо маани жөнүндөгү теорема боюнча эсептелинет:

$$t_{орт} = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} t(x)dx \qquad (12.3)$$

Мында $t = t(x)$ функциясы, көпчүлүк учурда $t = ax^{-b}$ түрүндө берилет, ал эми a – бир буюмду даярдоого кетирилген убакыт, b – өндүрүш процессинин көрсөткүчү.

4. $x_1 = 100$ дөн $x_2 = 121$ ге чейинки буюмду өздөштүрүүдөгү кетирилген орточо убакытты тапкыла, эгерде $a = 600$ (минөт), $b = 0{,}5$.

◊ 12.3 –формуланы пайдаланып, төмөнкүгө ээ болобуз.

$$t_{орт} = \frac{1}{121-100}\int_{100}^{121} 600x^{-1/2}dx = \frac{600}{21}2\sqrt{x}\Big|_{100}^{121} = \frac{400}{7} \approx 57{,}2 \text{ мин. } ◊$$

Көнүгүүлөр.

Анык интегралдарды эсептегиле.

12.1. $\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$ $\qquad \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$

12.2. $\int_4^9 \frac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{y}+1}dy$ $\qquad \int_1^e \frac{1+\lg x}{x}dx$

12.3. $\int_1^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$ $\qquad \int_0^1 xe^{-x}dx$

12.4. $\int_0^{\pi} x^3 \sin x\,dx$ $\qquad \int_0^{e-1} \ln(x+1)dx$

12.5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx$ $\qquad \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$

12.6. $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x + e^{-x}}}dx$ $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

12.7. $\int_0^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}}dx$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$

12.8. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{x^2-3x+2}dx$ $\int_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}dx$

Төмөндөгү функциялардын графиктери менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла.

12.9. $y = x^2, x + y = 2$ $y^2 = 2x+, x - y - 1 = 0$

12.10. $y = 2x - x^2, x + y = 0$ $y = 2^x, y = 2, x = 0$

12.11. $y = \frac{2}{x}, y = -\frac{x}{2} - \frac{5}{2}$ $y = x^2, y = 1 + \frac{3}{4}x^2$

12.12. $y = x, y = x + \sin^2 x$ $y = x^2, y = \frac{x^3}{3}$

12.13. $y = x^2, y = \sqrt{x}$ $y = \frac{1}{1+x^2}, y = \frac{x^2}{2}$

12.14. $y = \ln x, x = e, y = 0$ $y = -x^2, y = 2e^x, x = 0, x = 1$

Ox жана Oy огунун айланасында айландыруудан алынган жана төмөндөгүдөй сызыктар менен чектелген телонун көлөмүн тапкыла:

12.15. $y = xe^x, x = 1, y = 0$ $y = 2x - x^2, y = 0$

12.16. $y = x^2 + 1, y = 0, x = 1, x = 2$ $y = x^3, y = 1, x = 0$

Өздүк эмес интегралды эсептегиле.

12.17. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$ $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

12.18. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1}dx$ $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2+x-2}dx$

12.19. $\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}dx$ $\int_0^1 \ln x dx$

12.20. Бир күн ичиндеги жумушчунун эмгек өндүрүмдүүлүгү $z(t) = -0{,}00625\,t^2 + 0{,}05\,t + 0{,}5$ (сом/саат) функциясы менен берилет. Мында t – бул жумуш башталгандан берки убакыт, $0 \le t \le 8$. Продукция көлөмүн жана жумуш убагындагы анын чоңдугун туюндуруучу $u = u(t)$ функциясын тапкыла.

12.21. 1 тонна жүктү 1 км-ге жеткирүү наркы $f(x)=\frac{10}{x+2}$ (сом/км) функциясы менен берилет. 1 тонна жүктү 20 км-ге жеткирүү үчүн кетирилген чыгымды аныктагыла.

12.22. Суроо-талап жана сунуш функциялары $Q_D = Q_D(P), Q_S = Q_S(P)$ берилсин.

Ашык керектөөчүнү жана өндүрүүчүнү тапкыла:

а) $Q_D = P^2 - 4P + 3,\ Q_S = P^2$

б) $Q_D = -\ln 4P, \quad Q_S = \ln(1+P)$

в) $Q_D = 7e^{-2P}, \quad Q_S = 1 - e^{-2P}$

Адабияттар

1. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике.–М.: Финансы и статистика–2001, ч. I.–224 с.
2. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В.. Математика в экономике.–М.: Финансы и статистика–2000, ч. II.–376 с.
3. Шипачев В.С.. Высшая математика. .–М.: Высшая школа–1990.–479 с.
4. Красс М.С., Чупрынов Б.П.. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании.–М.: Дело, 2001.–688 с.
5. Кремер Н.Ш., Путко Б. А., Тришин И.М., Фридман М.Н.. Высшая математика для экономистов.–М.: Юнити, 2000.–471 с.

Авторлор жөнүндө кыскача маалымат

Жусупбаев Амангельди – көрүнүктүү окумуштуу жана улуу педагог, физика-математика илимдеринин доктору, профессор, Кыргыз Республикасынын билим берүү отличниги. Анын илимдеги кызыккан багыттары: экономикадагы математикалык методдор теориясы; экономика-математикалык моделдерди түзүү; оптимизация методдорун өркүндөтүү жана практикада оптимизация моделдерин пайдалануу болуп эсептелет. Ошондой эле, ал тарабынан даярдалган өлкөбүздөгү Жогорку окуу жайларынын студенттерине багытталган "Экономикадагы операцияларды изилдөө", "Оюндар теориясы", "Социалдык сферадагы математикалык моделдештирүү" окуу курстары боюнча лекция, практика, лабораториялык сабактары белгилүү. Профессор Жусупбаев А. 102 илимий-методикалык иштердин, анын ичинде 2 монографиянын автору. Азыркы учурда КРнын Улуттук Илимдер Академиясынын Математика жана Маалымат технологиялар Институтунун директору.

Омуров Таалайбек Дардайылович – Кыргыз Улуттук жана Кыргыз-Россия Славян университеттеринин профессору, Кыргыз республикасынын билим берүү отличниги жана мамлекетибиздин улуттук аттестациялык комиссиясынын эксперти, физика-математика илимдеринин доктору, профессор, 80 ге жакын илимий иштердин автору. Анын жетекчилиги менен үч кандидаттык диссертация корголгон.

Култаев Топчубай Чокоевич – физика-математика илимдеринин кандидаты, доцент, Кыргыз Республикасынын билим берүү отличниги. Ош Мамлекеттик Педагогикалык Институтунун физика жана математика факультетин 1979-жылы бүтүргөн. Адистиги – орто мектептин математика мугалими. Азыркы учурда ОшМУнун Экономикадагы математикалык методдор кафедрасынын башчысы. 62 илимий-методикалык иштердин автору.

Кыргыз Республикасынын билим берүү отличниги – Шабыкеев Бектурган, Кыргыз Мамлекеттик Университетинин физика жана математика факультетин 1960-жылы бүтүргөн, физика-математика илимдеринин кандидаты, доцент, 40тан ашык илимий эмгектердин, 12 методикалык колдонмо, кошумча окуу куралдардын, 3 окуу китептеринин автору.

Маматкадырова Гүлай Тагаевна – Ош Мамлекеттик Университетинин компьютердик технологиялар факультетинин Экономикадагы математикалык методдор кафедрасынын улук окутуучусу. ОшМУнун физика жана математика факультетин 1995-жылы бүтүргөн. Адистиги – математика жана информатика мугалими. Ал 15 илимий-методикалык иштердин автору.

Алыбаев Анарбек Масалбекович – Кыргыз Мамлекеттик Университетинин механика жана математика факультетин 1978-жылы бүтүргөн. Адистиги – математик. Физика-математика илимдеринин кандидаты, доцент. Азыркы учурда Ж. Баласагын атындагы Кыргыз Улуттук Университетинин жогорку математика жана билим берүүнүн технологиялары кафедрасынын башчысы, 38 илимий, илимий-усулдук эмгектердин автору.

ЭКОНОМИКАДАГЫ МАТЕМАТИКА

Жусупбаев А.Ж., Омуров Т.Д.,
Култаев Т.Ч., Шабыкеев Б.,
Маматкадырова Г.Т., Алыбаев А.М.

Басууга 25.04.2005-ж. берилди. Форматы 84x108 1/16.
Офсет кагазы. Заказ № 762. Нускасы 1000 даана.

"Турар" басмасынын басмаканасында басылды.
720054, Бишкек ш., Жибек-Жолу пр. 466.